РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 1050—1578 **№ 3** **Март 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1050. На механико-математическом факультете. Скорый И. А., Копытов В. Д., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 6, 143—145

Сообщается о докладах, сделанных на «Ломоносовских чтениях» 1954 г. на механико-математическом факультете МГУ. В частности, по математике были обсуждены 3 доклада: С. П. Фиников, О научном направлении кафедры дифференциальной геометрии; М. А. Крейнес, Н. Д. Айзенштат, О номографировании функций с точностью до малых высшего порядка; П. Л. Ульянов, *A*-интеграл и его применение в теории тригонометрических рядов.

1051. Задачи Академии наук Эстонской ССР в области технических и физико-математических наук. Хейль И. Г., Изв. АН ЭстССР, 1953, 2, № 1, 8—15

1052. Вступительное слово президента Болгарской академии наук академика Т. Д. Павлова (Встъпително слово на Председателя на БАН академик Т. Д. Павлов), Списание на Българ. АН, 1953, 1, № 1—2, 5—27 (болг.)

Освещаются достижения и недостатки в работе отделений, институтов Болгарской академии наук за отчетный период; подчеркивается роль Болгарской академии наук в деле борьбы за мир и укрепление болгаро-советской дружбы.

1053. Февральское собрание в Нью-Йорке (The February meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 3, 248—260 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 500-му собранию Американского математического общества.

1054. Апрельское собрание в Нью-Йорке (The April meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 4, 329—353 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 501-му собранию Американского математического общества.

1055. Апрельское собрание в Чикаго (The April meeting in Chicago), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 4, 354—385 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 502-му собранию Американского математического общества.

1056. Для исследователей-одиночек. Булиган (Pour les chercheurs isolés. Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 9—10, 318—320 (франц.)

Сообщается о подготовке к изданию Центром университетской документации (Centre de Documentation Universitaire, 5, place de la Sorbonne) новых серий публикаций под общим названием «Les études pratiques d'accès à la recherche». Излагается содержание первой серии «Les actualités géométriques», представленной двумя выпусками. Первый из них посвящен вопросам геометрии расстояний, в частности сводке результатов А. Д. Александрова и Буземана (H. Busemann). Второй содержит работу Гитель (M-lle Guitel) о применении графов к классификациям и графическому анализу доказательств.

В. А. Ефремович

1057. Объем математических знаний, требуемый при окончании средней школы. Лейтон (The mathematics required for graduation from high school. Layton W. I.), Math. Teacher, 1954, 47, № 5, 315—319 (англ.)

Обзор требований, предъявляемых по математике к абитуриентам средних школ (второй ступени) в США. По существу программ ничего не говорится. учитывается лишь удельный вес (в условных единицах) отдельных предметов. Так, в программе последних четырех классов удельный вес английского языка составляет 2,8 ед., математики — 0,6 ед., естествознания (физика, химия и т. д.) — 0,7 ед. и предметов общественного цикла — 1,7 ед.

В. И. Левин

1058 К. Тезисы докладов на XIX научно-технической конференции кафедр института (15—20 апреля 1953 года). Ростовский- на-Дону ин-т инж. ж.-д. трансп., Ростов-на-Дону, 1952—1953 уч. г., 102 стр.

Приведены, в частности, тезисы двух докладов по математике: П. Е. Данко, К вопросу о приближении функции одной и двух независимых пере-

менных в пространстве L; А. Г. Попов, О приближенном интегрировании уравнений 2-го порядка с колеблющимися решениями.

1059 К. Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения. Фетисов А. И., Шевченко И. Н., Рончаров В. Л., Гибш И. А. (Сб. статей), 140 стр., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1953, 1 р. 80 к.

1060 К. Математика, класс экспериментальных наук. Лепинар, Перне, Гози (Mathématiques, classe de sciences expérimentales. Lespinard V., Pernet R., Gauzit J., 2 éd., 338—114 pp., fig., pl., A Desvigne, Lyon, 1953, 815 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, ч. 1, № 6, 128 (библ.)

1061 К. Элементы математики для радио, телевидения и электроники. Фишер, Джейкобс (Elements of mathematics for radio, television and electronics. Fischer Bernhard, Jacobs Herbert, XXI + 569 pp., Macmillan, New York, 1954, 38 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 229, 8 (библ.)

1062 К. Математика для студентов, изучающих технику и прикладные науки. Бенни (Mathematics for students of engineering and applied science. Benny L. B., 792 pp., Oxford University Press, London, 1954, 35 s.) (англ.)

1063 К. Математическое решение задач техники со сборником упражнений и задач Миллера. Сальвадори, Миллер (La risoluzione matematica dei problemi della tecnica, con una raccolta di esercizi e problemi di K. S. Miller. Salvadori Mario George, Miller Kennth S., XVI + 265 p., ill., Sansoni Edizioni Scientifiche, Firenze, 1953, 2800 L.), Ricerca scient., 1954, **24**, № 3, 664 (библ.)

1064 К. Основы математики для изучения естественных и технических наук. Войтех (Zakladу matematiky ke studiu věd přirodnich a technických. Vojtěch Jan, 424 s., Nakl. Čs. ak. věd., Praha, 1953, 20 Kčs), Česka kniha, 1954, № 3, 83 (библ.)

1065 РЕЦ. Высшая математика. Основы математики с точки зрения техники. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения и ряды. Блазиус (Höhere Mathematik. Mathematische Grundlagen vom technischen Standpunkt aus analytischer Ceometrie, Differential- und Integral-Rechnung. Differential-Gleichungen und Reihen. Blasius Heinrich, 296 S., Aufgaben, 10 DM) [**Рецензия: Хёниш** (Hönisch W.), Energie und Technik, 1954, **6**, № 3, 72 (нем.)]

См. также: 1067

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1066. Леонардо и математика. Северн (Leonardo e la matematica. Severi F.), Scientia (Asso), 1953, 88, № 2, 41—44 (итал.)

Леонардо не был математиком, но ценил математику и с философской точки зрения (понятие о нуле и бесконечности), и с точки зрения логической строгости доказательств, исключающих всякие схоластические споры, и, наконец, с точки зрения практических ее приложений. Больших сведений по математике у него не было: его первоначальные вычисления являются неуверенными и иногда даже ошибочными, но в произведениях более позднего времени становятся более уверенными и точными. «Об Архимеде он пишет в «Атлантическом кодексе»: «Квадратура круга Архимедом хорошо намечена и плохо сделана. И хорошо намечена она там, где он говорит, что круг равен прямоугольнику, составленному из линии окружности и полудиаметра данного круга; и она плохо сделана там, где он квадрирует многоугольную фигуру с 96 сторонами; при этой квадратуре недостает 96 кусочков, отрезанных этими 96 сторонами».

Более серьезные занятия математикой у Леонардо начались после знакомства с Лукой Пачиоли в Милане, с которым в 1497 году он работал над «Божественной пропорцией» (в вышедшем в 1509 г. издании рисунки принадлежали Леонардо).

Леонардо больше ценил геометрию, чем алгебру. Из его математических достижений следует отметить квадратуру луночек, относительно которой он снова открыл теорему, известную уже Альгазену (1500); преобразование тел в другие эквивалентные (1503—1507) и геометрию тетраэдра; геометрические построения при помощи одного циркуля (построения Маскерони); определение центров тяжести (в частности, у Леонардо впервые предлагается определение центра тяжести пирамиды; Архимед дал только определение центра тяжести конуса, чего Леонардо не мог знать. *Прим. реф.*) и задачу Альгазена об отражении от сферического зеркала, решенную впервые только Гюйгенсом; для ее решения Леонардо употреблял прибор с шарнирным параллелограммом, реконструированный в 1929 году Марколонго.

Кроме того, следует отметить робкие попытки применения метода неделимых Архимеда — Галилея — Кавальери для определения площадей и объемов тел (квадратура эллипса, определение сферической площади октанта сферы). *И. Н. Веселовский*

1067. Развитие Математического института высшей технической школы (Дрезден) с 1945 г. Дрегер (Die Entwicklung der Mathematischen Institute der Technischen Hochschule seit 1945. Draeger Max), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952 —1953, **2**, № 3, 325—326 (нем.)

1068. Арнольд Иоганн Вильгельм Зоммерфельд. Уиттекер (Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld. Whittaker E. T.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 1, № 109, 125—128 (англ.)

Краткое изложение биографии Зоммерфельда с указанием значения основных его работ по механике.

теории дифференциальных уравнений, распространению электромагнитных волн вдоль проводов, дифракции рентгеновских лучей, квантовой механике, теории спектров и электронной теории металлов.

1069. Список научных работ академика Эд. Чеха. Чехосл. матем. ж., 1953, 3, № 2, 195—198 См. РЖМат., 1954, 3942.

1070 К. Аппендикс. Бойаи. (Appendix. Bolyai Janos, 213 pp., Editura Acad. RPR, Bucureşti, 1954, 8 lei) (библ.)

См. также: 1088, 1412

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1071. Характеристика порядковых чисел при помощи рекурсивно определенных функций. Шютте (Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Schütte Kurt), Math. Ann., 1954, 127, № 1, 15—32 (нем.)

Аккерман дал конструктивное построение некоторого отрезка второго числового класса (Ackermann W., Math. Z., 1951, 53, 403—413). Неконструктивные обозначения для чисел еще большего отрезка дал Веблен (Veblen O., Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9, 280—292). Автор показывает, как функции Веблена могут быть использованы для рекурсивного построения порядковых чисел (п. ч.); устанавливается также связь с системой Аккермана.

Вводятся «скобковые символы» (ск. с.)

$$\begin{pmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_n \\ \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix},$$

где $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — п. ч. и $0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. Два таких символа A и B считаются равными, если A получается из B вставкой или вычеркиванием столбцов вида $\alpha^0_{a_i}$. Если дана некоторая непрерывно возрастающая функция $\varphi(x)$ от п. ч., то, как известно, существует неограниченный класс «критических» чисел k таких, что $\varphi(k) = k$ (класс п. ч. называется неограниченным, если для каждого п. ч. можно указать число из класса, которое больше данного). Используя функцию $\varphi(x)$, каждому ск. с. A ставится в соответствие п. ч. φA следующим образом:

$$\varphi \binom{a}{0} = \varphi(a), \tag{2.1}$$

$$\varphi A = \varphi B \quad \text{для} \quad A = B. \tag{2.2}$$

Если $a_1 \neq 0$, то $\varphi \begin{pmatrix} a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \\ 0\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ есть a_0-е общее решение x всех уравнений $\varphi \begin{pmatrix} x\, a_1^* a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^*\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = x$, в которых $\alpha_1^* < \alpha_1$ и $a_1^* < a_1$. (2.3)

Используя некоторое лексикографическое расположение ск. с., методом трансфинитной индукции автор доказывает, что решения системы уравнений (2.3) образуют неограниченный класс п. ч.

Критические числа η, для которых $\varphi \binom{1}{\eta} = \eta$, называются E-числами (по отношению к исходной функции $\varphi(x)$). Каждое значение a функции $\varphi(x)$, которое не является E-числом, однозначно записывается в виде $\varphi \begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$, где $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ меньше a.

Показано, как сравнение двух термов φA и φB сводится к сравнению двух термов, содержащих вместе меньше символов φ, чем φA и φB (упорядочение не зависит от выбора φ). Тем самым упорядочиваются φ-числовые знаки (φ-ч. з.) (φ-Zahlzeichen), определяемые индуктивно:

1. символ 0 есть φ-ч. з.,
2. вместе с $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ φ-ч.з. является также и $\varphi \begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$.

Если взять, в частности, $\varphi(x) = 1 + x$, то через φ-ч. з. выражаются все порядковые числа, которые меньше наименьшего E-числа η_0, и только они. Тогда, например, $\varphi \begin{pmatrix} a\ b \\ 0\ 1 \end{pmatrix} = \omega^b + a$, $\varphi \begin{pmatrix} a\ 1 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}$ равно a-му ε-числу, $\varphi \begin{pmatrix} a\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ равно a-му критическому ε-числу.

Ск. с. $A = \begin{pmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ называется критическим, если некоторое $a_j = \varphi A$. Он называется особым (ausgezeichnet), если существуют q, r такие, что $a_0 = q + r$, $0 \leqslant r < \omega$ и ск. с. $\begin{pmatrix} q\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ критический. Через A' обозначается ск. с. $\begin{pmatrix} a_0 + 1\ a_1 \ldots a_n \\ 0 \quad \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$. Если предположить, что все значения φ являются числами второго рода, то терм $\bar{\varphi} A$ определяется так:

$$\bar{\varphi} A = \begin{cases} \varphi A', & \text{если ск. с. } A \text{ особый,} \\ \varphi A, & \text{если ск. с. } A \text{ не особый.} \end{cases}$$

Так же как для φA и φB, даются теоремы сравнения для $\bar{\varphi} A$ и $\bar{\varphi} B$. Отмечается, что $\bar{\varphi} \begin{pmatrix} \gamma\ \beta\ \alpha \\ 0\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ соответствует трехместному скобковому символу Аккермана (α, β, γ).

Термы $\varphi^* A$ вводятся определением:

$$\varphi^* A = \begin{cases} a_0 + 1, \text{ если } a_i = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, n \\ \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 - 1 + a_1 \\ 0 \quad\quad 1 \end{pmatrix}, \text{ если } a_1 \neq 0 \text{ и } a_i = 0 \text{ для всех } i = 2, \ldots, n \\ \overline{\varphi} A, \text{ если существует } j \geqslant 2, \text{ для которого } a_j \neq 0. \end{cases}$$

Тогда φ^*-числовые знаки охватывают тот же отрезок второго числового класса, что и φ-ч.з., и могут быть очень просто однозначно отображены на натуральные числа (н. ч.), если

1. п. ч. 0 сопоставить н. ч. 0,

2. п. ч. $\varphi^* \begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ сопоставить н. ч. $p_{\varkappa_0}^{k_0} \ldots p_{\varkappa_n}^{k_n}$, где через p_k обозначается k-ое простое число $p_0 = 2$, и п. ч. $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ сопоставлены соответственно н. ч. $k_0, \ldots, k_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n$.

Наконец доказывается, что φ-ч. з. образуют вполне упорядоченную систему. *В. К. Детловс*

1072. Относительное доказательство непротиворечивости. Шенфильд (A relative consistency proof. Shoenfield Joseph R.), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 1, 21—28 (англ.)

Реферируемая статья содержит, в частности, новое доказательство теоремы Ильзы Новак о том, что если непротиворечива теоретико-множественная система аксиом Цермело-Френкеля, то непротиворечива и система Бернайса-Гёделя (Novak Ilse, Fundam. math., 1950, 37, 87—110).

Пусть C — формальная система с бесконечным множеством индивидуальных переменных, индивидуальных, предикатных и функциональных символов и логических констант $\sim, \supset$, квантора общности и $=$; среди аксиом и правил вывода C содержатся все аксиомы и правила (классического) исчисления предикатов с равенством и, возможно, некоторые другие — так называемые нелогические — аксиомы, но нет никаких других правил вывода; индивидуальные переменные системы C будем обозначать через x, y, термы C — u, v, w. Пусть далее C' — система, являющаяся расширением C, а именно: символами C' являются, помимо символов C, еще бесконечное множество классовых переменных X, Y и символы «$\in$» и «$\wedge$». Термы и формулы C' определяются индуктивно, а именно: a) u и X — термы; b) формулы C суть также формулы C'; c) если U и V — термы, то $(U \in V)$ и $(U = V)$ формулы; d) если F и G — формулы, то $\sim F$, $(F \supset G)$, $(x)F$ — формулы; e) если F — формула, не содержащая кванторов (X), то $\hat{x}F$ — терм (именуемый абстрактом). Помимо аксиом C и аксиом исчисления предикатов с равенством для новых формул и переменных, C' содержит аксиомы:

$$U = V. \supset : U \in W. \equiv . V \in W;$$

$$(x)(x \in U. \equiv . x \in V) \equiv . U = V;$$

$$U \in V. \supset (\exists x)(x = U);$$

$$x \in \hat{x} F. \equiv F;$$

(в них U, V, W — термы C', F — формула C'; $\exists$ и $\equiv$ определяются как обычно). Правила вывода у C' те же, что и у C с соответствующим расширением для новых переменных X.

Основной результат: если некоторая формула f системы C доказуема в C', то она доказуема и в C. Если C — система Цермело — Френкеля, то C' оказывается системой Бернайса — Гёделя; для этого случая указанный результат получен Россером — Ван Хао (Rosser J. B., Wang Hao, J. Symbolic. Logic, 1950, 15, 113—129; см. также Mostowski A., Fundam. math., 1950, 37, 112).

Метод доказательства — последовательное устранение сначала классовых переменных (автор пользуется для этой цели методом доказательства ε-теорем Гильберта — Бернайса), затем абстракты устраняются последовательной заменой всех $\hat{x}F \in U$ на $\exists y\,(y = \hat{x}F. y \in U)$, далее — всех $U = V$, где U или V — абстракт, на $(x)(x \in U. \equiv . x \in V)$ и потом — всех $u \in \hat{x}F$ на результат подстановки u вместо свободных вхождений x в F.

Наконец, все $u \in v$ заменяются на $u = v$. Связность доказательства при этом не нарушается; аксиомы, если и нарушаются, то переходят в формулы, доказуемые в C, а формула f не меняется.

По мнению референта, автор в последнем разделе слишком бегло рассматривает аксиому C4 системы Гёделя (и напрасно вовсе не упоминает об аксиоме D этой системы, аналога которой не имеется в той формулировке системы Цермело — Френкеля, которая приведена в цитированной им статье Новак). Опечатки: на стр. 22 в последней строке третьего абзаца надо оба раза читать C' вместо C. *А. С. Есенин-Вольпин*

1073. Обобщение понятия ω-непротиворечивости. Хенкин (A generalization of the concept of ω-consistency. Henkin Leon), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 3, 183—196 (англ.)

Пусть F — формальная система, основанная на узком исчислении предикатов с равенством, и Γ — некоторое непустое множество ее индивидуальных констант. F называется Γ^n-непротиворечивой ($n > 0$ — целое число), если не существует формулы $A(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $x_1, \ldots, x_n$ — все ее свободные переменные и $\vdash \sim A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для любой группы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из n констант, входящих в Γ и $\vdash (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) A(x_1, \ldots, x_n) F$ называется Γ-выполнимой, если существует модель, для которой истинны все аксиомы F, и такая, что каждый индивидуум этой модели обозначается некоторой константой из Γ (о такой модели говорят, что она Γ-выполняет F). Доказывается, что Γ-выполнимость системы F влечет ее Γ^n-непротиворечивость при любом $n > 0$. (Системы Γ^n-непротиворечивые при любом $n > 0$ автор называет Γ^∞-непротиворечивыми. Если Γ конечно, то из Γ^1-непротиворечивости F следует ее Γ-выполнимость.

Для каждого целого $k \geqslant 0$ существует формальная система F_k и непустое множество Γ_0 ее индивидуальных констант такие, что F_k Γ_0^{k+1}- непротиворечива, но не Γ_0^{k+2}-непротиворечива.

Существует система F и непустое множество Γ индивидуальных констант этой системы такие, что

F Γ^{∞}-непротиворечива, но никакая модель не Г-выполняет F.

Система F называется сильно Г-непротиворечивой, если каждой ее формуле $A_i(x)$ (с единственной свободной переменной x можно сопоставить константу α_i из Г так, что никакая формула вида

$$((\exists x)\, A_{i_1}(x) \wedge \sim A_{i_1}(\alpha_{i_1})) \vee \ldots$$

$$\ldots ((\exists x)\, A_{i_n}(x) \wedge \sim A_{i_n}(\alpha_{i_n}))$$

не доказуема в F.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы существовала модель Г-выполняющая F, является сильная Г-непротиворечивость F.

Имеются опечатки: на стр. 194, строка 8 снизу, первый член дизъюнкции должен быть

$$(\exists x)\, A_{i_1}(x) \wedge \sim A_{i_1}(\alpha_{i_1}).$$

Кроме того, автор неточен в обозначении своих теорем; так, на стр. 191 он ссылается на теорему 10 (которой в работе вообще нет), вместо которой подразумевается теорема 6; на стр. 189 вместо «лемма 6» надо читать «лемма 3.3».

А. С. Есенин-Вольпин

1074. Частичная модель для «New Foundations» Куайна. Бенеш (A partial model for Quine's «New Foundations». Beneš Václav Edvard), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 3, 197—200 (англ.)

Хейлперин (Hailperin T., J. Symbolic Logic, 1944, 9, 1—19) показал, что система «New Foundations» Куайна (см. РЖМат. 1954, 4328) эквивалентна следующей системе, состоящей из конечного числа (9) аксиом, присоединенных к исчислению предикатов с равенством («|» означает штрих Шеффера, $\in$ — единственный предикатный символ системы, ιx — множество, состоящее из одного только элемента x, $\iota^n X$ означает $\iota(\iota^{n-1}X)$, $\langle X, Y\rangle$ означает $\iota^2 X \bigcup \iota(\iota X \bigcup \iota Y)$, где $\bigcup$, как обычно, есть знак теоретико-множественной суммы):

P1 $(u, v)\,(E\beta)\,(x)\,[x\in\beta \equiv x\in u \mid x\in v]$,

P2 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x, y)\,[\langle \iota x, \iota y\rangle \in\beta \equiv \langle x, y\rangle \in\alpha]$,

P3 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x, y, z)\,[\langle x, y, z\rangle \in\beta \equiv \langle x, y\rangle \in\alpha]$,

P4 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x, y, z)\,[\langle x, z, y\rangle \in\beta \equiv \langle x, y\rangle \in\alpha$,

P5 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x, y)\,[\langle y, x\rangle \in\beta \equiv x\in\alpha]$,

P6 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x)\,[x\in\beta \equiv (u)\,(\langle u, \iota x\rangle \in\alpha)]$,

P7 $(\alpha)\,(E\beta)\,(x, y)\,[\langle y, x\rangle \in\beta \equiv \langle x, y\rangle \in\alpha]$,

P8 $(E\beta)\,(x)\,[x\in\beta \equiv (Ey)\,(x = \iota y)]$,

P9 $(E\beta)\,(x, y)\,[\langle \iota x, y\rangle \in\beta \equiv x\in y]$.

Автор строит модель для системы аксиом P1—P8; его средства формализуются даже в не очень сильных теоретико-множественных системах и заведомо в «New Foundations». Отсюда он получает результат, что непротиворечивость этой системы может быть доказана в «New Foundations» и что аксиома P9 независима от P1—P8, если последние образуют непротиворечивую систему.

А. С. Есенин-Вольпин

1075. Интерпретации множеств условий. Куайн (Interpretations of sets of conditions. Quine W. V.), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 2, 97—102 (англ.)

Справедлива теорема, чаще всего называемая теоремой Левенгейма — Сколема: всякое выполнимое (имеется в виду на некотором непустом множестве) множество S формул узкого исчисления предикатов имеет счетную модель.

Существуют методы действительного получения счетной модели для выполнимого множества формул (см. библиографию в статье).

Автор дает еще один способ построения такой модели, более понятный, по его мнению, чем те, которые применялись до него. Метод рассуждений схож с построениями Клина и Гёделя.

Автор отдельно рассматривает, к чему сводится его метод, когда множество формул S конечно, и, слегка меняя рассуждения, доказывает полноту системы аксиом.

Ю. А. Шиханович

1076. Карнаповское обоснование теории вероятностей. Ван-Данциг (Carnap's foundation of probability theory. Van Dantzig D.), Syntese, 1953, 8, № 10, 459—470 (англ.)

В своей книге «Логические основания вероятности» (Logical Foundations of Probability, The University of Chicago Press, Chicago, 1950) Карнап пытается дать, впервые со времени возникновения логики, строгое обоснование индуктивной логики посредством новой трактовки теории вероятностей, основанной на понятии «вероятность$_1$», соответствующем «рациональной степени веры» и отличном от «вероятности$_2$», понимаемой в смысле частоты. Для этого Карнап дает обоснование понятия вероятности на семантике данного «языка-объекта» очень упрощенного типа: типа узкого исчисления предикатов с конечным числом предикатов и не более чем счетным числом индивидуальных постоянных (в частности, неявно делаемое предположение, что всякие n индивидуальных постоянных могут быть подставлены во всякий предикат порядка n, «есть одно из тех, которые настолько упрощают язык, что он становится почти непригодным для практического употребления», см. стр. 461 реферируемой статьи).

Рассматриваемая работа содержит краткое изложение содержания книги и ряд критических возражений рецензента как частного характера (например: «Прежде всего логическая точность не всегда такова, как можно было бы ожидать от книги, где столь много используется символическая логика», см. там же), так и принципиального характера. Кульминационным пунктом книги Карнапа является добавление к описанию «языка-объекта» функции $c(h, e)$, соответствующей «степени оправданности (подтверждения (confirmation)) гипотезы h на основе очевидности e «и подчиненной обычным аксиомам для условной вероятности (безусловная вероятность высказывания j определяется как $c(j, t)$ где t—«тавтологическая очевидность»). Система аксиом Карнапа «не является ни более простой, ни более общей, чем системы предшествующих авторов... Между тем как, например, система Колмогорова относится к произвольным множествам, элементами которых могут быть объекты любого рода, система Карнапа есть только конечное или счетное поле вероятностей в смысле Колмогорова с тем ограничением, что

элементами ее являются высказывания... Более того, в сравнении с Колмогоровым, который излагает свою систему аксиом и ее интерпретацию на нескольких страницах и с большой ясностью, изложение Карнапа, занимающее сотни страниц, содержащее множество определений, прерываемое длинными обсуждениями, полемикой и следствиями из почти тривиальных теорем, отличается исключительной громоздкостью» (стр. 463 реферируемой работы).

Основное возражение Ван-Данцига против обоснования теории вероятностей на семантике данной «системы языка» состоит в том, что, вопреки намерению Карнапа придать понятию «вероятность» объективный смысл, в его системе оно оказывается зависящим от выбора «языка-объекта» («степень оправданности одной и той же гипотезы h на основе той же очевидности» зависит от выбора исходных, «атомистических», предикатов). Возражение против обоснования индуктивной логики посредством теории вероятностей основывается на том, что даже если бы удалось дать удовлетворительное обоснование понятию «вероятность$_1$», а гипотезы h_1 и h_2 оказались бы, например, имеющими, на основании «всей доступной» очевидности (см. ниже), степени оправданности 0,891 и 0,939, то оставалось бы все же неясным, какие практические заключения могут быть сделаны из этих формальных математических утверждений, поскольку частотная интерпретация исключается суффиксом 1 при термине «вероятность». Оценивать же правильность высказывания посредством «музейного метода», состоящего в том, чтобы выставить гипотезу перед публикой, прикрепив к ней этикетку с напечатанной «степенью оправданности», значит препятствовать дальнейшему развитию науки, поскольку, например, 100 лет тому назад гипотеза о том, что все расстояния между предметами находятся в точном соответствии с аксиомами геометрии Евклида, получила бы подавляющую «степень оправданности».

Выдвигаемое Карнапом требование «тотальной очевидности», в силу которого оценка «степени оправданности» должна производиться лицом X на основе всего доступного знания, также вызывает возражения Ван-Данцига, поскольку знания людей становятся более тонкими и существование формальной системы «языка» (рассматриваемого Карнапом типа), способной выразить всю требуемую совокупность знаний, является неоправданным (оно во всяком случае не следует из того, что для всякого факта f существует логический «язык» L, способный его выразить, на что пытается опереться Карнап (см. его книгу, стр. 210—211), хотя такого рода аргументация содержит элементарную логическую ошибку: перестановку кванторов).

Несмотря на то, что попытка Карнапа придать объективный смысл понятию «вероятность$_1$» представляется Ван-Данцигу почти безнадежной, он все же заканчивает рецензию некоторыми советами автору.

Собственные взгляды Ван-Данцига также несвободны от крайнего релятивизма и субъективизма.

С. А. Яновская

1077 **РЕЦ. Энциклопедия математических наук. Т. II. Раздел I. Часть I. Математическая логика. Хермес, Шольц** (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vol. II, section I. Part I. Mathematische Logik. Hermes H., Scholz H., 82 pp., Teubner, Münster, Leipzig, 1952, 8.20 DM) [**Рецензия: Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 298—299 (англ.)]

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1078. **О представлении целого в виде суммы произведений целых чисел. Джонсон** (On the representations of an integer as the sum of products of integers. Johnson S. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 177—189 (англ.)

Рассматривается вопрос о числе решений $R(N)$ уравнения

$$N = x_{11}x_{12}x_{13} + x_{21}x_{22}x_{23} + x_{31}x_{32}x_{33}$$

в натуральных числах. Автор пользуется методом И. М. Виноградова. Пусть

$$S(N) = \sum_{x_1x_2x_3 \leqslant N} \exp(2\pi i x_1x_2x_3t), \quad x_j > 0, j = 1, 2, 3;$$

$$Q = N^{11/12}.$$

Тогда

$$R(N) = \int_{-1/Q}^{1-1/Q} S^3(t) \exp(-2\pi i N t)\, dt.$$

Разбиение интервала $[-1/Q;\ 1-1/Q]$ на основные и дополнительные интервалы осуществляется следующим образом. Интервалы, включающие все t с условиями $t = h/q + z$, $(h, q) = 1$, $0 \leqslant h \leqslant q \leqslant Q$, $1 \leqslant q \leqslant N^{1/12}$, $|z| \leqslant (qQ)^{-1}$ будем называть основными. Доказывается, что

$$R(N) = \mathfrak{S}(N)(2!)^{-1} N^2 \lg^6 N + O(N^2 \lg^5 N),$$

где

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p [1 - V(p)] \times$$

$$\times \sum_{d/N} d \prod_{\substack{p^m \mid d \\ p^{m+1} \nmid d}} [V(p^m) - V(p^{m+1})]\,[1 - V(p)]^{-1};$$

$$V(q) = [v(q)\, q^{-2}]^3, \quad v(q) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant q} (\nu, q).$$

Легко видеть, что $\prod_p [1 - V(p)]$ положительно и меньше 1.

Кроме того, рассматривается обобщение поставленной задачи и указываются асимптотические формулы для числа решений уравнения

$$N = x_{11}x_{12}\cdots x_{1n} + \cdots + x_{k1}x_{k2}\cdots x_{kn}$$

в натуральных числах, а также для числа решений уравнения

$$N = x_{11}x_{12}\cdots x_{1m_1} + x_{21}x_{22}\cdots x_{2m_2} + \cdots$$
$$\cdots + x_{k1}x_{k2}\cdots x_{km_k}$$

в натуральных числах. *В. И. Нечаев*

1079. Квадратические вычеты. Анкени (Quadratic residues. Ankeny N. C.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 107—112 (англ.)

Сделана попытка доказать, что наименьший положительный квадратический невычет $n(k)$ по простому модулю $k \equiv 3 \pmod 4$ удовлетворяет неравенству

$$n(k) < k^{\varepsilon} \qquad (1)$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $k > k_0(\varepsilon)$.

Однако рассуждения автора неверны. Применяя соотношение

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\ln N^*_{\min}}{\ln D} \frac{\max\limits_x \left|\sum\limits_{n\leqslant x} \chi(n)\right|}{\sqrt{D}\ln D} = 0 \qquad (2)$$

(доказано в работе Линника Ю. В., Реньи А. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, 539—546, теорема 1/в), автор не замечает, что $N^*_{\min}$ обозначает модуль наименьшего по абсолютной величине степенного невычета. В интересующем его случае $D = k \equiv 3 \pmod 4$ соотношение (2) тривиально, так как $\chi(-1) = -1$ и $N^*_{\min} = 1$. Если бы (2) было верно только для положительных невычетов, то (1) действительно можно было бы доказать и значительно проще, чем это сделано в статье. *К. А. Родосский*

1080. Об отношении фареевых рядов к гипотезе Римана. Копршива (Příspěvek ke vztahu Fareyovy řady a Riemannovy domněnky. Kopřiva Jiří), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 1, 77—82 (чеш.)

Рассматривается вопрос о выражении гипотезы Римана относительно нулей $\zeta(s)$ с помощью свойств дробей Фарея. Обозначая через $M(q)$ сумму $\sum_{k=1}^{q} \mu(k)$, где $\mu(k)$ — числовая функция Мёбиуса, и принимая во внимание эквивалентность гипотезы Римана и оценки

$$M(q) = O(q^{1/2+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \qquad (1)$$

автор получает возможность воспользоваться тождеством

$$\sum_{\rho\leqslant 1} f(\rho) = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) \sum_{s=1}^{k} f\left(\frac{s}{k}\right),$$

где $\sum^{*}_{\rho\leqslant 1} f(\rho)$ распространена на все значения дробей ряда Фарея порядка q. Отсюда, используя (1), можно вывести ряд равноценных гипотезе Римана оценок для сумм, зависящих от дробей Фарея. Наиболее простые частные случаи даны автором ранее в другой работе (РЖМат, 1955, 595). *А. И. Попов*

1081. О значениях полинома, свободных от степеней. Куджани (Sui valori di un polinomio ehe risultano liberi da potenze. Cugiani Marco), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 291—298 (итал.)

Пусть $F(x)$ — полином степени $g \geqslant 1$ с дискриминантом $\neq 0$ такой, что $F(1)$, $F(2)$, ... — целые числа, $\nu(m)$ — число решений сравнения $F(x) \equiv 0 \pmod m$, ζ — вещественное число.

Доказывается (теорема 1), что в совокупности чисел

$$F([\zeta+1]),\ F([\zeta+2]),\ \ldots,\ F([\zeta+\xi]) \qquad (1)$$

число чисел L^*_s, не делящихся на s-ые степени простых чисел, не превосходящих $\varphi(\xi)$, где $s \geqslant 2$ — целое и $2\ln\ln\xi < \varphi(\xi) = O(\xi)$, равно

$$L^*_s = \xi \prod_p (1 - \nu(p^s)\, p^{-s}) + O(\xi (\ln\ln\xi)^{1-s}).$$

Доказывается (теорема 3), что если $u_1, \ldots, u_t, u_{t+1}, \ldots$ — заданная возрастающая последовательность простых чисел, $\ln^2\xi < \varphi(\xi) = O(\xi^{1-\eta})$, где $0 < \eta < 1$, $t = o(\ln\xi)$, то число чисел $L^*_{s,1}$ в (1), которые не делятся на s-ые степени простых чисел, отличных от чисел u, не превосходящих $\varphi(\xi)$, и, кроме того, не делятся на $u_1, \ldots, u_t$, равно

$$L^*_{s,1} = \xi \prod_{1\leqslant i\leqslant t} (1 - \nu(u_i)\, u_i^{-1}) \times$$
$$\times \prod_{p\neq u} (1 - \nu(p^s)\, p^{-s}) + O(\xi (\ln\xi)^{-1} (\ln\ln\xi)^{1-s}).$$

Эти теоремы даются в несколько более общем виде. Они получаются непосредственным применением одной теоремы Риччи (Ricci G., Rend. Circolo mat. Palermo, 1933, **57**, 433—475), доказанной им методом Виго Бруна.

В качестве приложений теорем 1 и 3 получаются следующие результаты. Пусть $F(q_1)$, $F(q_2)$, ..., ..., $F(q_i)$, ... — последовательность всех значений $F(x)$, не делящихся на простые числа в степени $g + l$ ($l \geqslant 1$, $F(q_i)$ не имеют постоянного делителя, отличного от ± 1), тогда

$$\delta_n = q_{n+1} - q_n = O(n^{g/(g+l)}) \quad \text{(теорема 2).}$$

Пусть $E(N)$ — число представлений N в виде $N = x^g + l_g$, где $x > 0$, l_g не делится на простые числа в степени g ($g \geqslant 2$). $E'(N)$ — число таких представлений с добавочным условием $(x, N) = 1$, тогда

$$E(N) \sim N^{1/g} \prod_{p^g \mid N} (1 - p^{-1}) \times$$
$$\times \prod_{p\nmid N} (1 - \nu_N(p^g)\, p^{-g}) \quad \text{(теорема 4),}$$

$$E'(N) \sim N^{1/g} \prod_{p \mid N} (1 - p^{-1}) \times$$
$$\times \prod_{p\nmid N} (1 - \nu_N(p^g) p^{-g}) \quad \text{(теорема 5),}$$

где $\nu_N(m)$—число решений сравнения $x^g \equiv N \pmod m$.

А. А. Бухштаб

1082. Об интервалах между значениями аргумента, для которых полином свободен от степеней. Куджани (Sugli intervalli fra i valori dell' argomento pei quali un polinomio risulta libero da potenze. Cugiani Marco), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 1—2, 95—103 (итал.)

Пусть $F(x) = a_0x^g + a_1x^{g-1} + \cdots + a_g$ $(a_0 > 0)$ — полином с дискриминантом, отличным от нуля, такой, что $F(1), F(2), \ldots$ — целые числа. $\nu(m)$ — число решений сравнения $F(x) \equiv 0 \pmod m$, $\Lambda_s = \prod_p (1 - \nu(p^s)\, p^{-s})$, D — наименьшее общее кратное знаменателей $a_0, a_1, \ldots, a_g$ и $DF(x) = D_1F_1(x)\, D_2F_2(x) \cdots D_hF_h(x)$ $(D = D_0D_1 \cdots D_h$, $D_0 \geqslant 1)$ — разложение $DF(x)$ на неприводимые множители.

$$F(q_1),\ F(q_2),\ \ldots,\ F(q_n),\ F(q_{n+1}),\ \ldots$$

$$(1 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots)$$

— все значения полинома, не делящиеся на простые числа в степени k, где $k = g + l$ $(l \geqslant 1)$, $\delta_n = q_{n+1} - q_n$. Оценки δ_n сверху для случая, когда $F(x) = x$, были получены Холберстамом и Ротом (Halberstam H., Roth K., J. London Math. Soc., 1951, 26, 268—273).

Доказывается, что:

1) $\underline{\lim}\ \delta_n \leqslant 1/\Lambda_k$,

2) $\overline{\lim}\ \delta_n \ln\ln n\ (\ln n)^{-1} \geqslant h/(gk)$,

3) $\delta_n = O\left(n^{(g/k)-\alpha}/(\ln n)^{\beta}\right)$,

где $\alpha = g/(k^2 + k)$, $\beta = k/(k+1)$ при $g \leqslant l$ и $\alpha = l'/(k^2 - k)$, $\beta = 1$ при $g > l$.

Эти результаты выводятся из одной теоремы автора (см. реф. 1081), основанной на работах Риччи, в которых он применял эратосфеново решето к задачам в области значений заданного полинома.

А. А. Бухштаб

1083. К аддитивной арифметике полиномов и чисел, свободных от степеней. Куджани (Sull'aritmetica additiva dei polinomi e degli interi liberi da potenze. Cugiani Marco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 74—76 (итал.)

Сообщаются без доказательства следующие результаты, полученные применением метода эратосфенова решета:

1) $\overline{\lim}\ N^{-1/g} E(N) = \lambda_1$ $(0 < \lambda_1 \leqslant 1)$,

$\underline{\lim}\ N^{-1/g}\ E(N) \ln\ln N = \lambda_2$ $(0 < \lambda_2 < \infty)$.

$E(N)$ обозначает число представлений N в виде $N = x^g + l_g$, где x принимает целые положительные значения такие, что $(x, N) = 1$, а l_g — целые, не делящиеся на простые числа в степени g, $g \geqslant 2$— фиксированное целое число.

2) Через $E_1(N)$ обозначается число представлений N в таком же виде, как и выше, однако при условии, что x принимает значения, свободные от квадратов (не делящиеся на квадраты простых чисел). Для $E_1(N)$ получаются такие же результаты, как и для $E(N)$, но с другими значениями постоянных λ_1 и λ_2.

3) $E_2(N) > \gamma N^{1/g} (\ln\ln N)^{1-g}$,

$E_2(N)$ обозначает число представлений N в виде

$$N = F(x) + l_t,\ F(x) > 0,$$

где $F(x) = a_0x^g + a_1x^{g-1} + \cdots + a_g$ $(a_0 > 0,\ g \geqslant 2)$ — полином с целочисленными значениями, l_t — целые числа, не делящиеся на простые числа в степени t, $t \geqslant g$, $\gamma > 0$ — постоянная, не зависящая от $N \geqslant N_0$. Доказательства 1) и 3) были опубликованы ранее автором (Ann. mat. pura ed appl., 1952, 33, 135—143).

А. А. Бухштаб

1084. О критической решетке в четырехмерном пространстве (R_4). Вольф (Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum (R_4). Wolff Karl H.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 1, 38—56 (нем.)

Частично переносятся результаты Минковского о плотнейшем решетчатом расположении выпуклых тел в трехмерном пространстве (Minkowski H., Gesamm. Abh., II, 1911, 3—42) на случай пространства четырех измерений R_4.

(§ 1) Пусть в R_4 имеется решетка точек и $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ — линейно независимые точки этой решетки. Рассмотрим октаэдр $P = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4]$ с вершинами в точках $\pm\mathfrak{p}_1$, $\pm\mathfrak{p}_2$, $\pm\mathfrak{p}_3$, $\pm\mathfrak{p}_4$; октаэдр P называется пустым, если он не содержит (внутри или на границе) точек решетки, кроме $\mathfrak{o}$ и $\pm\mathfrak{p}_1$, $\pm\mathfrak{p}_2$, $\pm\mathfrak{p}_3$, $\pm\mathfrak{p}_4$. Вслед за Брунннграбер (Brunngraber E., Über Punktgitter, Diss., Wien, 1944) доказано, что всегда можно выбрать базис решетки так, что для пустого октаэдра $P = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4]$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \mathfrak{p}_2 = (0, 1, 0, 0),\ \mathfrak{p}_3 = (0, 0, 1, 0), \\ \mathfrak{p}_4 = (0, 0, 0, 1) \text{ или } (0, 1, 1, 2), \text{ или } (1, 1, 1, 2), \\ \text{или } (1, 1, 1, 3), \text{ или } (1, 1, 2, 4), \text{ или } (1, 2, 2, 5), \end{array}\right\} \quad (1)$$

т. е. имеется 6 типов пустых октаэдров решетки.

(§ 2) Пусть K — выпуклое тело с центром симметрии в $\mathfrak{o}$; пусть на его границе лежат точки решетки $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ одного из видов (1), образующие пустой октаэдр. Доказано, что если сверх того ни одна из точек решетки, кроме $\mathfrak{o}$, вида (r_1, r_2, r_3, r_4), $|r_i| \leqslant 5$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ не лежит внутри K, то и вообще ни одна из точек решетки, кроме $\mathfrak{o}$, не лежит внутри K (в статье результат более точен: вместо множества $|r_i| \leqslant 5$ перечислено значительно меньшее множество точек (r_1, r_2, r_3, r_4)— свое для каждого из 6 типов октаэдров,— образующее «заградительный ряд» решетки в указанном смысле).

(§ 3) Полученная в § 2 теорема прилагается к случаю четырехмерного шара, причем вновь получается известный результат Коркина и Золотарева о минимуме положительной квадратичной формы четырех переменных (Korkine A., Zolotareff G., Math. Ann., 1872, 5, 581—583; ср. также Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, 1947, 84—86; Ollerenshaw K., J. London Math. Soc., 1949, 24, 190—200; 1951, 26, 316—318).

Примечание референта. Следует отметить, что изложение автора недостаточно четко. Он не дает явного определения пустого октаэдра, и лишь из его рассуждений (лемма 4) следует, что это надо понимать так, как формулировано выше (ибо, кроме указанных 6 типов, имеются и другие октаэдры, скажем, [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), p_4], $p_4 = (2, 2, 3, 7)$ или $p_4 = (2, 3, 4, 9)$, не содержащие внутри точек решетки, кроме 0). Но тогда автор ошибается (лемма 1), считая, что любые 4 линейно независимые точки решетки на поверхности выпуклого тела K, не содержащего внутри, кроме 0, точек решетки, — образуют пустой октаэдр. Среди таких точек можно лишь выбрать p_1, p_2, p_3, p_4, образующие пустой октаэдр (этого и достаточно в рассматриваемой теории): например, выбираем так, чтобы объем октаэдра [p_1, p_2, p_3, p_4] был наименьшим. Подобного же уточнения требует и доказательство леммы 8. *А. В. Малышев*

1085. О неоднородных минимумах некоторых сходящихся последовательностей бинарных квадратичных форм. Годуин (On the inhomogeneous minima of certain convergent sequences of binary quadratic forms. Godwin H. J.), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 17, 28—46 (англ.)

Пусть $f(x, y)$ — неопределенная бинарная квадратичная форма, $M_1(f)$ — неоднородный минимум формы. Оценивается $M_1(f)$ для тех последовательностей форм, для которых предельная форма имеет известную систему дискретных минимумов. Через q_n обозначаются знаменатели подходящих дробей квадратичной иррациональности $\omega = (1+\sqrt{5})/2$ и доказываются 4 теоремы, в которых определяются значения M_1 для форм вида

$$\left(x + \frac{q_{3m+1}}{q_{3m}}\, y\right)\left(x - \frac{q_{3m-1}}{q_{3m}}\, y\right);$$

$$\left(x + \frac{q_{3m}}{q_{3m-1}}\, y\right)\left(x - \frac{q_{3m-2}}{q_{3m-1}}\, y\right);$$

$$\left(x + \frac{q_{3m+2}}{q_{3m+1}}\, y\right)\left(x - \frac{q_{3m}}{q_{3m+1}}\, y\right), \qquad (m \geqslant 1)$$

и для формы $x^2 - p_n^2 q_n^{-2} y^2$, где p_n/q_n — подходящие дроби квадратичной иррациональности $\omega = \sqrt{2}$.

В конце статьи приводятся значения пределов, к которым стремятся найденные значения M_1 при $m \to \infty$ и $n \to \infty$.

В добавлении к статье указывается, что для форм

$$f_n = \{x + (p_n/q_n)\, y\}\{x + (1 - p_n/q_n)\, y\},$$

где p_n/q_n — подходящие дроби для $(\sqrt{13}+1)/2$, $M_1(f_n) \to (11\sqrt{13} - 39)/2$ при $n \to \infty$.

Э. Е. Симакова

1086. Заметка о теореме Макбита. Роджерс (A note on the theorem of Macbeath. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 2, № 114, 133—143 (англ.)

Пусть Γ — неоднородная решетка в n-мерном пространстве с детерминантом $d(\Gamma)$ и K — ограниченное выпуклое множество точек с центром симметрии в точке C. Критическим детерминантом для K называется

$$\Delta(K) = \inf d(\Gamma) \quad (C \in \Gamma,\ \Gamma \cap K = C).$$

Макбит (Macbeath A. M., Ann. Math., 1952, **56**, № 2, 269—293) доказал теорему: Если R — выпуклое множество точек и $\Gamma \cap R \neq 0$, то существует точка $X \in \Gamma \cap R$ такая, что

$$\Delta(\{R - X\} \cap \{-R + X\}) \leqslant d(\Gamma) \qquad (1)$$

($\lambda R + \mu X$ обозначает для любых чисел λ и μ множество точек вида $\lambda Y + \mu X$, $Y \in R$).

В реферируемой статье дается более простое доказательство теоремы Макбита и показывается, что неравенству (1) удовлетворяет каждая внешняя точка $X \in \Gamma \cap R$. (Если G — замкнутое множество, то точку $X \in G$ автор называет внешней, если существует полупространство, содержащее X, но не содержащее других точек G.) Исследуются также условия, при которых существует бесконечное число точек $X \in \Gamma \cap R$, удовлетворяющих (1).

От неравенства (1) автор переходит к неравенству

$$V(R, X) = V(\{R - X\} \cap \{-R + X\}) \leqslant 2^n d(\Gamma).$$

Через $V(R, \Gamma)$ обозначается нижняя грань $V(R, X)$ для $X \in \Gamma \cap R$. Доказывается теорема: Если $X \in \Gamma \cap R$ и $V(R, X) < V(R, \Gamma)/\lambda_n$, где $\lambda_n < 1$ и зависит только от n, то X является внешней точкой для $\Gamma \cap R$. *Э. Е. Симакова*

1087. Ещё одно доказательство теоремы о простых числах. Брёйш (Another proof of the prime number theorem. Breusch Robert), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 49—53 (англ.)

Рассматривается новый вариант элементарного доказательства асимптотического закона распределения простых чисел. Доказательство основано на оценке суммы $\sum_{n \in R} \vartheta(x/n)$, где $\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ — классическая функция Чебышева, p — простое число, x — достаточно большое положительное число, R — интервал $(\log x,\ x/\log x)$.

С помощью элементарных свойств функции $\vartheta(x)$ (Ингам А. Е., Распределение простых чисел, М.—Л., 1936) получается оценка снизу:

$$\sum_{n \in R} \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) > (1 - h)\, x \log x \qquad (1)$$

с положительной константой $h < 1$.

Из результатов Селберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, **50**, 305—313)

$$\vartheta(x) \log x + \sum_{p \leqslant x} \vartheta(x/p) \log p = 2x \log x + o(x \log x)$$

и

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\ \vartheta(x)/x = 1 + \gamma, \qquad \underline{\lim_{x \to \infty}}\ \vartheta(x)/x = 1 - \gamma$$

автор, допуская, что $\gamma \neq 0$, выводит оценку сверху:

$$\sum_{n \in R} \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) < (1 - 3h)\, x \log x. \qquad (2)$$

Но оценки (1) и (2) противоречивы. Следовательно, $\gamma = 0$, что эквивалентно теореме о простых числах.
Б. М. Бредихин

1088. Мысль и рассуждение в математике (сообщение третье). Доказательство предположения Баудета. Ван-дер-Варден (Einfall und Überlegung in der Mathematik. Der Beweis der Vermutung von Baudet. Van der Waerden B. L.), Elem. Math., 1954, 9, № 3, 49—56 (нем.)

В теореме Ван-дер-Вардена об арифметических прогрессиях, которой посвящена 1-я глава книги А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел» (ГТТИ, 1947 г.), утверждается, что если k и l — любые натуральные числа, то существует натуральное число $n(k, l)$ такое, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины $n(k, l)$ произвольным способом на k классов, найдется, хотя бы в одном из этих классов арифметическая прогрессия, состоящая из l членов.

Формулировка и доказательство этого факта появились в связи с попытками доказать следующее предположение голландского математика Баудета: Пусть l — произвольное наперед заданное натуральное число и пусть совокупность всех натуральных чисел разбита каким угодно способом на два класса. Тогда, по меньшей мере, в одном из этих классов найдется прогрессия из l членов,

В статье воспроизводятся обстоятельства, при которых была доказана теорема Ван-дер-Вардена; описывается дискуссия по этой проблеме, имевшая место между Артином, Шрейером и автором в 1926 г.

Доказательство, изложенное здесь автором, опирается на «принцип ящиков» Дирихле и метод математической индукции; оно вполне наглядно благодаря применению простых схем. По существу это есть доказательство, предложенное автором четверть века назад (Van der Waerden B. L., Nieuw arch. wiskunde, 1927, 15, 212), дополненное элементами наглядности, оно лишь по форме и некоторыми деталями отличается от доказательства, изложенного в упомянутой книге А. Я. Хинчина.

Примечание референта. Помимо наглядности, которую автор сумел придать доказательству своей теоремы, представляет интерес проведенный автором опыт психологического анализа математического открытия.
И. Г. Мельников

1089. Обобщение одной теоремы Ферма. Нагелль (Verallgemeinerung eines Fermatschen Satzes. Nagell Trygve), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 153—159 (нем.)

В первой части работы доказывается, что уравнение $x^2 + 2 = y^n$, где $n > 1$, не может иметь целых решений, за исключением случая $n = 3$, $x = \pm 5$, $y = 3$. Этот результат довольно просто вытекает из одной теоремы Малера (Mahler K., Archiv mat. naturvid, 1935, 41, № 6, 1—26).

Во второй части доказывается, что если уравнение $x^2 + 8 = y^n$, где $n > 2$, имеет решение в натуральных числах, то n — простое число вида $8k \pm 1$, и это решение единственное. Доказательство основано на разложении на множители в поле $R(\sqrt{-2})$ левой части уравнения. В конце работы утверждается, что тем же методом можно получить аналогичные результаты для некоторых уравнений вида $x^2 + 8D = y^n$.
В. Д. Подсыпанин

1090. Целые алгебраические числа, у которых два сопряженных числа лежат вне единичного круга. II. Самет (Algebraic integers with two conjugates outside the unit circle. II. Samet P. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, ч. 2, 346 (англ.)

Короткая заметка, посвященная доказательству того, что множество, составленное из вещественных сопряженных целых алгебраических чисел ρ и σ ($\rho = \bar{\sigma}$) степени $n > 2$ таких, что $|\rho| > 1$ и $|\sigma| > 1$, в то время как остальные сопряженные по модулю меньше 1, всюду плотно в области $|x| > 1$ числовой прямой.
А. Г. Постников

1091. Шестнадцатиричный характер числа 2. Уайтман (The sixteenth power residue character of 2. Whiteman A. L.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 364—373 (англ.)

Если целое число a не делится на нечетное простое $p = ef + 1$, то a является вычетом степени e по mod p тогда и только тогда, когда $a^{(p-1)/e} \equiv 1 \pmod{p}$.

В статье на основе теории деления круга устанавливаются давно известные критерии для определения характера числа 2 по mod p в случаях: $e = 4$ (Gauss C. F., Werke, 1876, 2, 89), $e = 8$ (Reuschle C. G., Programm zum Schlusse des Schuljahrs 1855—1856 am Königlichen Gymnasium zu Stuttgart, 1856, 14) и $e = 16$ (Cunningham A., Proc. London Math. Soc., сер. 1, 1895, 27, 88).

Тем самым показано, что метод определения биквадратичного характера ($e = 4$) числа 2, исходящий от Гаусса, может быть использован при определении восьмеричного и шестнадцатиричного характера числа 2.

Доказанные теоремы формулируются следующим образом:

Теорема 1. Пусть $p = a^2 + b^2$ — простое формы $4n + 1$, a — нечетное, b — четное. Тогда, если 2 — квадратичный вычет по mod p, то $2^{(p-1)/4} \equiv (-1)^{b/4} \pmod{p}$.

Теорема 2. Пусть 2 — биквадратичный вычет простого $p = a^2 + b^2$ формы $8n + 1$, a — нечетное, b — четное. Тогда, если n — четное, то $2^{(p-1)/8} \equiv (-1)^{b/8} \pmod{p}$, если же n — нечетное, то $2^{(p-1)/8} \equiv (-1)^{b/8+1} \pmod{p}$.

Теорема 3. Пусть $p = a^2 + b^2 = c^2 + 2d^2$ — простое формы $16n + 1$, a и c — нечетные. Тогда, если $2^{(p-1)/8} \equiv 1 \pmod{p}$, то $2^{(p-1)/16} \equiv (-1)^{b/16+d/4} \pmod{p}$.

Библиография, 14 названий.
И. Г. Мельников

1092. Доказательство одного предложения Куммера. Денеш (Proof of a conjecture of Kummer. Dénes Peter), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 206—214 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Введем следующие обозначения: m, k, $n \geqslant 0$, p, f, g, s, c — целые рациональные числа, p — простое $\geqslant 3$, $\zeta = \exp(2\pi i / p)$, $\Omega(\zeta)$ — поле деления круга, $\varphi(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$ — целые числа из $\Omega(\zeta)$, взаимно простые с p, $D_m F(e^v) = \dfrac{d^m}{dv^m} F(e^v)_{v=0}$. Куммер высказал предположение, что если

$$\varphi(\zeta) \equiv \varphi_1(\zeta) \pmod{p^{n+1}},$$

то

$$D_{kp^n}\log\varphi(e^v)\equiv D_{kp^n}\log\varphi_1(e^v)\pmod{p^{n+1}}.$$

Имевшиеся доказательства Вандивера (Vandiver H. S., Bull. Amer. Math. Soc., 1922, 28, 400—407; Monatsh. Math. und Physik, 1939, 48, 369—380) и Я. В. Успенского относятся к частным случаям теоремы. По словам автора, работа Успенского не была опубликована ввиду его смерти. В настоящей статье дано полное доказательство предложения Куммера. Доказательство основано на леммах:

Лемма C. Если $f_0\equiv F_0\pmod p$ и $p\nmid f_0$, то для $k>0$

$$D_k\log F(e^v)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{w}(-1)^{i-1}i^{-1}D_k[(F(e^v)-f_0)/f_0]^i\pmod{p^w}.$$

Лемма D. Если $(p-1)\nmid k$, $h(e^v)=\sum_{i=0}^{l}f_ie^{iv}$,

$$g(e^v)=\sum_{i=0}^{p-1}e^{iv},$$

то

$$D_{kp^n}h(e^v)g(e^v)\equiv 0\pmod{p^{n+1}}.$$

Лемма E. Если $q>0$, $s>0$, то $D_{q(p-1)p^n}h(e^v)\times$

$\times g^s(e^v)\equiv 0\pmod{p^z}$, где $z=\min[(s-1),(n+1)]$.

Лемма F. Если $c>0$, $k>0$, $k<p-1$, то

$$D_{kp^n}h(e^v)g^{cp^m}(e^v)\equiv 0\pmod{p^{n+m-1}}.$$

Лемма G. Если $(p-1)\nmid k$ и $\varphi_1(\zeta)=\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)g(\zeta)$, то $D_{kp^n}\log\varphi(e^v)\equiv D_{kp^n}\log\varphi_1(e^v)\pmod{p^{n+1}}$.

Доказательство предложения Куммера теперь очевидно. Если $\varphi=\sum_{i=0}^{l}d_i\zeta^i$ и $\varphi_1=\sum_{i=0}^{l_1}d_i'\zeta^i$ — данные числа, то, приведя их к виду $\varphi^*=\sum_{s=0}^{p-2}a_s\zeta^s$, $\varphi_1^*=\sum_{s=0}^{p-2}b_s\zeta^s$ и имея в виду, что $\varphi_1^*\equiv\varphi^*\pmod{p^{n+1}}$, получаем: $a_k\equiv b_k\pmod{p^{n+1}}$, $k=0,1,2,\ldots,p-2$. Последние сравнения позволяют написать: $D_m\log\varphi_1^*(e^v)\equiv D_m\log\varphi^*(e^v)\pmod{p^{n+1}}$. Применяя к сравнению лемму G, автор получает полное доказательство предложения Куммера.

П. Н. Реморов

1093. Новые типы трехчленных сравнений, соответствующие критерию, применяемому к последней теореме Ферма. Вандивер (New types of trinomial congruence criteria applying Fermat's last theorem. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 4, 248—252 (англ.)

Пусть

$$x^l+y^l=z^l, \tag{1}$$

x, y, z — целые рациональные, $y\equiv 0\pmod l$, $(xz, l)=1$, l и p ($l\neq p$) — нечетные простые числа, $c=[N(\mathfrak{p})-1]/l$, $N(\mathfrak{p})$ — норма простого в $K(\zeta)$ идеала $\mathfrak{p}$, делителя идеала (p); $\zeta=\exp(2\pi i/l)$.

Если $p=1+cl$, то из (1) следуют сравнения $(x+\zeta^a y)^c\equiv 1\pmod{\mathfrak{p}}$ или $x+\zeta^a y\equiv\omega_a^l\pmod{\mathfrak{p}}$ $(a=1,2,\ldots,p-1)$ $x+y=k_0^l$, (2)

где ω_a — целое в K. Пусть целое рациональное число g является первообразным корнем по простому идеалу $\mathfrak{p}$ такое, что $\mathfrak{p}=(g^c-\zeta,p)$ и $g^{ac}\equiv\zeta^a\pmod{\mathfrak{p}}$. Таким образом, из (2) вытекает система сравнений:

$$x+y=k^l \quad x+g^{ac}y\equiv k_a^l\pmod p, \tag{3}$$
$$a=1,2,\ldots,p-1,$$

$(k_a, p)=1$, k_a — целое рациональное число.

Учитывая, что $x\equiv g^r$, $y\equiv g^s$, $k_a\equiv g^{ta}\pmod p$, (3) запишем в виде $1+g^{ac+s-r}\equiv g^{lta-r}\pmod p$ или

$$1+g^{i+cx_1}\equiv g^{j+lx_2}\pmod p, \tag{4}$$
$$0\leqslant i\leqslant c-1;\ 0\leqslant j\leqslant l-1.$$

Рассматривается задача о нахождении числа $(i, j)_{cl}$ различных решений (4) при фиксированных значениях i и j. Получена теорема: если (1) разрешается в отличных от нуля целых числах x, y, z (при всех ранее упомянутых ограничениях относительно $x, y, z, l, p, \mathfrak{p}$), тогда в (4) найдутся такие i и j, что $(i, j)_{cl}=l$. Замечены опечатки: стр. 248 формула (4), стр. 249 (третья формула сверху).

П. Н. Реморов

1094. Геометрическое рассмотрение теоремы Ферма. Харпер (A geometrical consideration of Fermat's theorem. Harper A. B.), Tech Engng News, 1954, **35**, № 7, 32—33 (англ.)

Автор статьи делает не новую попытку рассмотреть геометрически проблему Ферма, останавливая свое внимание на графиках некоторых уравнений, для которых теорема Ферма доказана. Статья не содержит принципиально новых результатов.

П. Н. Реморов

1095. Некоторые предварительные комментарии к последней теореме Ферма. Джеймс (Some introductory comments on Fermat's last theorem. James Glenn), Math. Mag., 1954, **27**, № 4, 213—216 (англ.)

Пусть $z>y>x>0$ и $n>3$ — целые рациональные числа $(xyz, n)=1$, удовлетворяющие уравнению Ферма

$$x^n+y^n=z^n. \tag{1}$$

Автор статьи ставит целью при помощи элементарных соображений доказать, что из уравнения (1) (при n простом) вытекает неравенство

$$x<n(2n^2+1)^n.$$

В работе имеются неточности: 1) На стр. 213 вместо N надо писать n. То же на стр. 215 формулы (5), (7), (9) и на стр. 216 формула (10). 2) На стр. 215 в формуле (9) вместо k_1^n, k_2^n, k_3^n надо писать nk_1, nk_2, nk_3. 3) На стр. 214 не указан предел $\lim_{n\to\infty}x/z$.

П. Н. Реморов

1096. О предположении Якобсталя. Селберг (On a conjecture by Ernst Jacobsthal. Selberg Sigmung), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1953, **26**, № 21, 89—93 (англ.)

Для всех $x>0$ доказывается неравенство

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\left\{x\left[\frac{\lambda}{x}\right]-(x+1)\left[\frac{\lambda}{x+1}\right]\right\}\geqslant 0,$$

где $[t]$ — наибольшее целое число $\leqslant t$.

Э. К. Фогелс

1097. Систематические исследования о теореме Каталана. Натуччи (Ricerche sistematiche intorno al «teorema di Catalan». Natucci Alpinolo), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 1, 297—300 (итал.)

Известна гипотеза Каталана: Уравнение

$$x^y-z^t=1 \qquad (1)$$

имеет единственное решение в целых, бóльших единицы, числах x, y, z, t, именно при $x=3, y=2, z=2, t=3$.

Исследуются значения $x=2, 3, 4$ при различных целых z, y, t; в этих случаях имеется лишь одно вышеуказанное решение уравнения (1).

В. А. Голубев

1098. Некоторые диофантовы проблемы. Напп (Some diophantine problems. Knapp Thomas), Tech Engng News, 1953, **35**, № 1, 54—55 (англ.)

На ряде примеров выясняется значение удачно выбранной подстановки для решения в рациональных числах неопределенных уравнений.

В. А. Голубев

1099. Задача об игре в бридж. Уотсон (Bridge problem. Watson G. L.), Math. Gas., 1954, **38**, № 324, 129—130 (англ.)

В бридж играют четыре человека (двое на двое). Рассматривается вопрос о том, как можно составить расписание игр так, чтобы каждый игрок имел каждого другого игрока один раз партнером и два раза противником. Этот вопрос решен в случае, когда число игроков имеет вид $4m+1$. Рассматривается также случай $4m$ игроков, но в этом случае полного решения не дано. *В. Д. Подсыпанин*

1100 К. Основы теории чисел. Виноградов И. М. (數論基礎. 維諾格拉陀夫) , 210 頁 , 商務印書館 , (Шан-уиньшу гуань), 上海 (Шанхай), 1953, 14900 юаней) (кит.)

Перевод с русского. Приложен краткий китайско-русско-английский словарь математических терминов.

1101 К. Приведенные последовательности целых чисел и псевдослучайные числа. Дюпарк, Леккеркеркер, Переманс (Reduced sequences of integers and pseudo-random numbers. Duparc H. J. A., Lekkerkerker C. G., Peremans W., 15 pp., Amsterdam, Math. Centrum, Rapport ZW 1953-002, 1953) (англ.)

Авторы изучают последовательности чисел, наименьший положительный вычет которых (mod m) используется как источник псевдослучайных чисел. Изучаются два типа таких последовательностей: общая геометрическая прогрессия и последовательность Фибоначчи. Авторы изучают только длину периода последовательности и не касаются того, удовлетворяют ли соответствующие псевдослучайные числа каким-либо стандартным критериям. Длина периода для геометрической прогрессии есть показатель для модуля m знаменателя прогрессии, тогда как для последовательности Фибоначчи она — произведение «ранга Люка́ появления m» на одно из чисел 1, 2, 3 или 4. Имеется шесть иллюстрирующих таблиц. Для некоторых приложений надо позаботиться исключить некоторые «заражающие» влияния в случае чисел Фибоначчи и в случае геометрической прогрессии малого знаменателя.

D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 8, 770.

1102 К. Последняя теорема Ферма. Ключ к тайне. Лепин (Le dernier théorème de Fermat. La clef du mystère. Lepine Francois, 11 pp., Dijon, L. Venot, 1953), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 2, 31 (библ.)

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1103 К. Собрание сочинений, Часть II. Том I. Алгебра, дифференциальные формы, дифференциальные системы. Том II. Бесконечные группы, дифференциальные системы, теория эквивалентности. Картан (Oeuvres complètes. Part II. Vol. I. Algèbre, formes différentielles, systèmes différentiels. Vol. II. Groupes infinis, systèmes différentiels, théorie d'équivalence. Cartan Elie, Gauthier-Villars, 1953), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 10, 1176 (библ.)

1104 РЕЦ. Основы алгебры. Коржинек (Základy algebry. Kořínek Vladimír, 494 str., Nakladatelství CSAV, Praha, 1953, 64 Kčs) **[Рецензия: Маржик, Вильгельм** (Mařík Jan, Vilhelm Václav), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 4, 359—366 (чеш.)]

1105. Эрмитовы разложения и полосы для нулей многочленов. Туран (Hermite-expansion and strips for zeros of polynomials. Turán P.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 148—152 (англ.)

Пусть $z=x+yi$ и $f(z)=\sum_{m=0}^{n} b_m H_m(z)$,

где

$$H_m(z)=(-1)^m e^{z^2}\frac{d^m(e^{-z^2})}{dz^m}.$$

Все корни $f(z)$ лежат в каждой из полос

$$|y| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{M}{|b_n|}\right) \quad (M = \max_{m<n} |b_m|),$$

$$|y| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\left|\frac{b_0}{b_n}\right|} + \sqrt[n-1]{\left|\frac{b_1}{b_n}\right|} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \sqrt{\left|\frac{b_{n-2}}{b_n}\right| + \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|}\right).$$

Сходные результаты верны и для многочленов более общего вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k G_m^{(k)}(z),$$

где $G_m(z)$ есть многочлен степени m, все корни которого вещественны. *И. П. Натансон*

1106. Простое доказательство обобщенного детерминантного тождества Сильвестра с усилением. Мор (Einfacher Beweis des verallgemeinerten Determinantensatzes von Sylvester nebst einer Verschärfung. Mohr Ernst), Math. Nachr., 1953, **10**, № 5—6, 257—260 (нем.)

Дается простое доказательство известного тождества Сильвестра $S^{h+1}_{h,n} = A_n (A_h)^{n-h-1}$ и его обобщения $S^m_{h,n} = (A_n)^{\binom{n-h-1}{m-h-1}} \cdot (A_h)^{\binom{n-h-1}{m-h}}$. Здесь $A_n = |a_{ij}|^n_1$, $A_h = |a_{ij}|^h_1$, $S^m_{h,n}$ (в частности, $S^{h+1}_{h,n}$) — определитель порядка $\binom{n-h}{m-h}$, составленный из миноров m-го порядка определителя A_n, получающихся окаймлением минора A_h.

Дается также выражение для ранга определителя $S^m_{h,n}$ через ранги A_n и A_h и через ранги систем первых h векторов-строк и векторов-столбцов определителя A_n. *И. А. Вильнер*

1107. Заметка о системах матриц, одновременно приводимых к треугольной форме. Ивс (A note on sets of matrices simultaneously reducible to the triangular skeleton. Eaves J. C.), J. Math. and Phys., 1954, **32**, № 4, 302—306 (англ.)

Устанавливается необходимое и достаточное условие приводимости конечной системы матриц к треугольной форме. С этой целью понятие треугольной матрицы распространяется на случай прямоугольных матриц и вводится понятие вполне треугольной матрицы:

а) $m \times n$ матрица, состоящая из квадратной треугольной матрицы V, окаймленной справа нулевыми столбцами, снизу нулевыми строками, называется $m \times n$ треугольной матрицей.

б) Блочная матрица $A = (A_{ij})$, имеющая $m \times n$ ($m \geqslant n$) треугольные блоки по главной диагонали и $p \times q$ ($p \leqslant q$) строго треугольные (т. е. с нулями по главной диагонали) блоки ниже ее, называется вполне треугольной матрицей.

Доказывается теорема 1: Пусть $\Sigma = \{A_i, i = 1,2, \ldots, r\}$ — конечная система $\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)$ матриц. Необходимое и достаточное условие одновременной приводимости матриц системы Σ к треугольным матрицам состоит в том, что они при некотором подобном преобразовании приводимы к вполне треугольным матрицам.

Пользуясь специальным подобранным преобразованием, автор освобождается затем от ограничения, наложенного на порядок матриц системы Σ. *Х. Р. Сулейманова*

1108. О симметрических, ортогональных и кососимметрических матрицах. Сюй (On symmetric, orthogonal, and skew-symmetric matrices. Hsu P. L.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **10**, 37—44 (англ.)

Доказывается, что всякая симметрическая матрица S p-го порядка представима в виде

$$S = [2(I + X)^{-1} - I]\, D_\theta\, [2(I + X)^{-1} - I]', \quad (1)$$

где I — единичная матрица; D_θ — диагональная матрица, элементы которой суть корни характеристического многочлена матрицы S; X — некоторая кососимметрическая матрица.

Единственность: Пусть характеристический многочлен $|S - \lambda E|$ матрицы S имеет только простые корни, элементы главной диагонали матрицы D_θ расположены справа налево в порядке убывания, и существует такая ортогональная матрица $\Gamma = (\gamma_{ij})$, что: а) $S = \Gamma D_\theta \Gamma'$, б) $\gamma_{1i} < 0$, $i = 2,3, \ldots, p$, в) минор $\Gamma^{(1)}$ элемента γ_{11} удовлетворяет условию $|\Gamma^{(1)} + I| \neq 0$; в этом случае среди всех кососимметрических матриц X, подчиненных условию: элементы $(1,2), \ldots, (1, p)$ матрицы $(I + X)^{-1}$ отрицательны, — только одна удовлетворяет равенству (1).

Функциональный определитель J системы функций $S_{ik} = S_{ik}(X_{n,m}; \theta_l)$ $(i \leqslant k, n < m)$, определяемых равенством (1), равен $2^{\frac{1}{2}p(p-1)} |I + X|^{-(p-1)} \times \prod_{i<j} (\theta_i - \theta_j)$; здесь S_{ik}, $X_{n,m}$, θ_l суть соответственно элементы матриц S, X, D_θ. Пусть $f(S)$ — функция элементов симметрической матрицы S, зависящая только от корней $\theta_1, \ldots, \theta_p$ характеристического многочлена $|S - \lambda E| : f(S) = g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$, причем $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_p$; тогда

$$\int_\Sigma f(S)\, dm = \frac{\pi^{\frac{p(p+1)}{4}}}{\prod_{r=1}^{p} \Gamma(r/2)} \int_\theta g(\theta_1, \ldots, \theta_p) \times \prod_{i<j} (\theta_i - \theta_j)\, d\theta_1, \ldots, d\theta_p.$$

Здесь Σ есть $\frac{1}{2}p(p+1)$-мерное пространство, образованное различными элементами матрицы S, dm — элемент объема пространства Σ, а θ — область $\theta_1 > \theta_2 > \ldots > \theta_p$. *Я. М. Каждан*

1109. О характеристических числах стохастических матриц. Сулейманова Х. Р., Уч. зап.

Моск. гос. пед. ин-та, 1953, сер. 71 матем., вып. I, 167—197

Матрица $\|\varphi_{ij}\|_1^n$ порядка n с неотрицательными элементами называется стохастической, если $\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}=1$ $(i=1,\ldots,n)$. Матрица n-го порядка называется матрицей простой структуры, если она имеет n линейно независимых собственных векторов. Максимальное по модулю характеристическое число всякой стохастической матрицы равно 1.

Пусть $E_n=\{1,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}\}$ — набор комплексных чисел, причем $|\lambda_j|\leqslant 1$ $(j=1,\ldots,n-1)$. Пусть при этом $\lambda_{2k-1}=\alpha_k+i\beta_k$, $\lambda_{2k}=\alpha_k-i\beta_k$ $(k=1,\ldots,q;\ 2q\leqslant n-1)$, $\lambda_k=\alpha_k$ $(k=2q+1,\ldots,n-1)$, где α_k и β_k $(\beta_k\neq 0)$ — вещественные числа. Обозначим через F матрицу $(n-1)$-го порядка, у которой на диагонали стоят клеточные матрицы $\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ -\beta_k & \alpha_k\end{pmatrix}$ $(k=1,\ldots,q)$ и числа α_k $(k=2q+1,\ldots,n-1)$, а остальные элементы — нули.

Для того чтобы существовала стохастическая матрица n-го порядка простой структуры, имеющая характеристическими числами набор чисел E_n, необходимо и достаточно существование такого полиэдра Q $(n-1)$-го измерения, что $f(Q)\subset Q$, где f — аффинное преобразование с матрицей F, $f(Q)$ — образ полиэдра Q при преобразовании f.

Пусть $E_n=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ — набор вещественных чисел, причем $\lambda_i=1$ для $i=1,\ldots,k$; $\lambda_i=-1$ для $i=k+1,\ldots,k+p$; $|\lambda_i|<1$ для $i=k+p+1,\ldots,n$.

Если $k-p=s\geqslant 1$ и отрицательные, отличные от -1, числа набора E_n можно разбить на $q\leqslant s$ групп так, чтобы сумма модулей чисел, входящих в каждую из групп, была меньше 1, то E_n может быть набором характеристических чисел некоторой стохастической матрицы n-го порядка.

Если $\lambda_i<0$ для $i=k+p+1,\ldots,n$, то эти условия являются и необходимыми. Пример показывает, что в общем случае они необходимыми не являются. Приводится ряд других результатов, относящихся к матрицам с неотрицательными элементами.

Формулировка основных результатов опубликована в заметке автора (Докл. АН СССР, 1949, 66, № 3, 343—345). *Ф. И. Карпелевич*

1110. О четырехточечных матрицах. Ишак (On four-point matrices. Ishaq M.), Ganita, 1953, 4, 61—78 (англ.)

Доказано, что 4×4 матрица может быть выражена в виде линейной комбинации $x=\sum_0^{15}c_pA_p$ шестнадцати базисных матриц A_p, встречающихся в теории электрона Дирака (здесь c_p — след xA_p). Матрица A_p, умноженная на соответственно выбранную степень мнимой единицы, записывается в виде ${}^r\alpha_{mn}$, где $m=0,1;\ n=0,1,2,3,4$ и либо $m=n=0$, либо $0<m<n$. $r=1,2,3,4$ обозначает тип A_p. Каждые A и α являются четырехточечными матрицами, т. е. имеют точно один не равный нулю элемент в каждой строке и каждом столбце. Эти элементы расположены в последовательных строках, согласно одному из четырех порядков расположения индексов столбцов

(1, 2, 3, 4) (2, 1, 4, 3) (3, 4, 1, 2) (4, 3, 2, 1),

каждый из которых характеризует тип матрицы. Не равные нулю элементы могут принимать только значения ± 1, $\pm i$, причем i либо входит в матрицу 4 раза, либо не входит в нее совсем. Таким образом, имеются 64 такие матрицы, по 16 каждого типа r, или 8 пар $\pm{}^r\alpha_{mn}$, где $m=0,1;\ n=0,1,2,3,4$ и $m<n$, или $m=n=0$. Неравенство нулю значения m (соответственно n) указывает на отрицательный знак перед элементом в m-й строке (соответственно n-м столбце) матрицы α_{mn}.

Выводятся свойства A_p и ${}^r\alpha_{mn}$ (например, $A_p^2=E$), причем особое внимание обращено на их мультипликативные свойства. Так, эти 64 матрицы образуют группу, структура которой исследуется путем деления ее структурной таблицы из 64 строк и 64 колонн на 8 равных блоков. Это исследование изложено несколько сжато, что создает трудности для чтения. Термины «группа» и «групповой характер» употребляются недостаточно четко. *H. W. Turnbull*

Перевод из Math. Revs, 1953, 15, № 3, 191.

1111. Является ли способ линеаризации Дирака необходимым? Врклян (Ist das Diracsche Verfahren der Linearisation notwendig? Vrkljan V. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1953, A37, № 4, 491—498 (нем.)

Релятивистское волновое уравнение Дирака для электрона получается путем разложения выражения

$$p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2=u^2c^{-2}$$

на множители, линейные относительно величин p, m, u, в кольце матриц четвертого порядка. Автор ставит вопрос о единственности этого разложения и получает ряд других разложений, приводящих на первый взгляд к уравнениям, отличным от уравнения Дирака. Исследуя эти уравнения, автор устанавливает, что из них вытекают те же физические следствия, что и из уравнения Дирака. *Ю. А. Гольфанд*

ГРУППЫ

1112. Группы, допускающие покрытие перестановочными конечными подмножествами. Нейман (Groups covered by permutable subsets. Neumann B. H.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 2, № 114, 236—248 (англ.)

Главным результатом, доказанным в статье, является следующая теорема (7.1): Группа G допускает покрытие попарно перестановочными конечными подмножествами, количества элементов в которых в совокупности ограничены, в том и только том случае, если группа G обладает подгруппой конечного индекса, коммутант которой конечен (термин «покрытие» означает, что группа G является теоретико-множественной суммой указанных подмножеств). Тривиальными примерами групп, допускающих такие покрытия, являются конечные группы и произвольные абелевы группы. Если отказаться от требования ограниченности мощностей подмножеств общим конечным числом, то оказывается, что

покрытие попарно перестановочными конечными множествами допускает любая группа с конечным числом образующих, а также счетная локально конечная группа; не допускают такого покрытия несчетные локально свободные группы.

Из других результатов отметим два: теорема (3.1): Мощности всех классов сопряженных элементов группы H имеют конечную общую верхнюю грань в том и только том случае, если коммутант группы H конечен; теорема (5.1): Если группа H обладает такой конечной подгруппой K, что все классы по двойному модулю (K, K) попарно перестановочны, то $H = KL$, где L — подгруппа, представляющая собою объединение всех конечных классов сопряженных в H элементов. Последняя теорема может быть выведена и в качестве следствия из работы Маутнера (Mautner F. I., Duke Math. J., 1950, 17, 437—441). *О. Н. Головин*

1113. Пример группы со счетным числом образующих, не допускающей покрытия конечными перестановочными подмножествами. Кон (A countably generated group which cannot be covered by finite permutable subsets. Cohn P. M.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 2, № 114, 248—249 (англ.)

Заметка непосредственно примыкает к работе Неймана (см. реф. 1112). Доказывается, что свободная группа со счетным множеством образующих не допускает покрытия конечными попарно перестановочными подмножествами элементов. Тем самым устанавливается, что из покрываемости группы конечными попарно перестановочными подмножествами не следует покрываемость всех ее подгрупп.

О. Н. Головин

1114. Полугруппы, во всех представлениях которых операторы имеют неподвижные точки. Ляпин Е. С., Матем. сб., 1954, 34(76), № 2, 289—306

Изучается класс $\boldsymbol{P}$ полугрупп, все представления которых с помощью преобразований множеств обладают следующим свойством: для каждого преобразования существует элемент множества, остающийся инвариантным при этом преобразовании. Эти полугруппы $\mathfrak{A}$ характеризуются тем, что для каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ существует левый нуль 0_a: $0_a a = 0_a$. Этот класс полугрупп имеет особый интерес потому, что к нему принадлежат, в частности, следующие полугруппы: 1) полугруппа всех преобразований сближения полного метрического пространства M, т. е. преобразований φ, удовлетворяющих условию: для любых $m_1, m_2 \in M$

$$\rho(\varphi(m_1), \varphi(m_2)) \leqslant \theta_\varphi \rho(m_1, m_2) \quad (0 \leqslant \theta_\varphi < 1),$$

где ρ — метрика в пространстве; 2) полугруппа всех непрерывных преобразований n-мерного симплекса, 3) полугруппа всех непрерывных преобразований выпуклого бикомпактного подмножества линейного локальновыпуклого пространства. Класс полугрупп $\mathbf{Q}_0$ называется базисным классом для класса полугрупп $\mathbf{Q}$, если он является минимальным классом, обладающим тем свойством, что всякая полугруппа, являющаяся объединением полугрупп из $\mathbf{Q}_0$, сама принадлежит $\mathbf{Q}$, причем всякая полугруппа из $\mathbf{Q}$ является объединением полугрупп из $\mathbf{Q}_0$. Для уяснения строения класса полугрупп $\mathbf{P}$ находится его базисный класс. *В. В. Вагнер*

1115. О характеристике регулярных эквивалентностей в полугруппах. Тьеррен (Sur la caractérisation des équivalences régulières dans les demi-groupes. Thierrin Gabriel), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, № 11, 942—947 (франц.)

Как показал Дюбрей (Dubreil P., Mém. Acad. Sci. Inst. France, 1941, 63, 1—52), с каждым комплексом H полугруппы D может быть ассоциировано отношение эквивалентности R_H, определяемое условием

$$(a \equiv b\ (R_H)) \leftrightarrow ((H : a) = (H : b)),$$

где $(H : a)$ — подмножество, определяемое условием

$$x \in (H : a) \leftrightarrow ax \in H$$

и называемое правым частным комплекса H по элементу a. Отношение эквивалентности R_H называется главным справа отношением эквивалентности, соответствующим комплексу H. R_H является регулярным справа отношением эквивалентности, т. е. оно удовлетворяет условию

$$(a \equiv b\ (R_H)) \to \bigcap_x (ax \equiv bx\ (R_H)).$$

Комплекс H называется сильным справа, если

$$((H : a) \cap (H : b) \neq \phi) \to ((H : a) = (H : b)),$$

и чистым справа, если

$$\bigcap_x (H : x) \neq \phi.$$

Если комплекс H является одновременно сильным справа и чистым справа, то отношение эквивалентности R_H будет сократимым справа, т. е. будет удовлетворять условию

$$(ax \equiv bx\ (R_H)) \to (a \equiv b\ (R_H)).$$

Продолжая развитие этих идей Дюбрея, автор статьи ассоциирует с каждым непустым семейством комплексов $\mathfrak{H}$ регулярное справа отношение эквивалентности $R_{\mathfrak{H}} = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} R_H$. Семейство $\mathfrak{H}$ называется сильным справа, если

$$\bigcup_{H \in \mathfrak{H}} ((H : a) \cap (H : b) \neq \phi) \to \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} ((H : a) = (H : b)),$$

и чистым справа, если $\bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H$ является чистым справа комплексом. Если семейство $\mathfrak{H}$ сильное справа и чистое справа, то отношение эквивалентности $R_{\mathfrak{H}}$ сократимо справа. Обратно, если R — произвольное отношение эквивалентности, регулярное справа и сократимое справа, то существует семейство $\mathfrak{H}$, состоящее из классов R, которое будет сильным справа и чистым справа, причем для каждого такого семейства $R_{\mathfrak{H}} = R$.

Произвольное бинарное отношение T между элементами полугруппы D называется редуцируемым справа, если оно удовлетворяет условию

$$\bigcap_x (ax)\, T\, (bx) \to aTb.$$

Автор вводит понятие полного справа семейства комплексов, с помощью которого он характеризует

отношения эквивалентности, регулярные справа и редуцируемые справа, подобно тому, как это было сделано для отношений эквивалентности, регулярных справа и сократимых справа. *В. В. Вагнер*

1116. Мультипликативные системы, определяемые образующими и соотношениями. II. Моногенные лупы. Эванс (On multiplicative systems defined by generators and relations. II. Monogenic loops. Evans Trevor), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 579—589 (англ.)

Лупы с одним образующим называются автором моногенными. Изучаются свойства луп, связанные с методом определяющих соотношений. Доказано: 1) группа автоморфизмов свободной моногенной лупы изоморфна бесконечной циклической группе; 2) моногенная лупа, определяемая конечным непустым множеством соотношений, имеет лишь конечное число эндоморфизмов; 3) множество различных (неизоморфных) гомоморфных образов моногенной лупы, определяемой конечным числом соотношений, имеет мощность континуума; в частности, множество моногенных луп (гомоморфных образов свободной моногенной лупы) имеет мощность континуума; 4) если две свободные лупы изотопны, то они изоморфны друг другу.

Утверждение 2) позволило автору указать алгоритм решения проблемы изоморфизма для моногенных луп, т. е. указать метод, дающий возможность, как только заданы две моногенные лупы конечным множеством соотношений, в конечное число шагов выяснить, изоморфны они или нет. Приведен пример моногенной лупы (заданной счетным множеством соотношений), изоморфной своей истинной фактор-лупе. Приведен пример несвободной лупы, изотопной свободной лупе.

Указывается, что все результаты работы в той или иной мере переносятся на случай моногенных (т. е. порожденных одним элементом) группоидов, односторонних квазигрупп, квазигрупп и односторонних луп. Определения последних понятий см. в работе автора (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, 47, 637—649). *Ю. И. Соркин*

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1117. К теории символа Шафаревича. Лапин А. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 2, 145—158

Рассматривается новое чисто локальное построение локальной теории поля классов для абелевых расширений простого показателя l. Построение основывается на явной формуле для символа нормменного вычета (μ, ν). Бо́льшую часть работы занимает доказательство инвариантности этого символа при замене простого элемента. В более общем случае показателя, являющегося степенью простого числа, доказательство инвариантности было изложено в предшествующей работе автора (РЖМат, 1953, 101), однако предлагаемое здесь доказательство несравненно проще.

Символ (μ, ν) определяет в фактор-группе мультипликативной группы локального поля k по подгруппе l-ых степеней скалярное произведение. Доказывается, что относительно этого скалярного произведения группа чисел, являющихся нормами из некоторого абелева расширения, и группа чисел, являющихся l-ми степенями в этом расширении, образуют ортогональную пару. Отсюда сразу же вытекают все основные теоремы локальной теории полей классов. *И. Р. Шафаревич*

1118. Вполне дифференцируемые функции от $[(n+1)$-дуальных] переменных из алгебры ранга $n+1$ над полем вещественных чисел. Сабан (Funzioni totalmente derivabili di variabili in $[(n+1)$-duali] un'algebra ad $n+1$ unità definita nel corpo reale. Saban Giacomo), Giorn, mat. Battaglini, 1954, **82**, № 1, 267—276 (итал.)

Элементы алгебры ранга $n+1$ над полем вещественных чисел с базисом $1, u_1, \ldots, u_n$ и с таблицей умножения $u_i u_j = 0$ автор называет $(n+1)$-дуальными числами (при $n=1$ это дуальные числа, применяющиеся в геометрии). Рассматриваются функции F от $(n+1)$-дуального аргумента $Z = z_0 + z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$, значения которых являются также $(n+1)$-дуальными числами. Функция F называется вполне дифференцируемой, если отношение

$$\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z},$$

$$\Delta Z = \Delta z_0 + \Delta z_1 u_1 + \ldots + \Delta z_n u_n,$$

$\Delta z_0 \neq 0$ имеет определенный конечный предел при $\Delta z_i \to 0$. Предполагая, что встречающиеся вещественные функции от вещественных аргументов имеют непрерывные частные производные второго порядка, автор совершенно элементарно показывает, что вполне дифференцируемая функция имеет вид

$$F(Z) = f(z_0) + \sum_{\alpha=1}^{n} [f'(z_0)\, z_\alpha + g_\alpha(z_0)]\, u_\alpha.$$

В работе много опечаток. *З. И. Боревич*

1119. Простые альтернативные кольца. Клейнфелд (Simple alternative rings. Kleinfeld Erwin), Ann. Math., 1953, **58**, № 3, 544—547 (англ.)

Основная теорема реферируемой статьи полностью решает вопрос о структуре простых альтернативных колец. Доказывается, что простое альтернативное кольцо или ассоциативно, или является алгеброй Кэли — Диксона. Сначала устанавливаются новые соотношения между ассоциаторами и коммутаторами альтернативных колец. Опираясь на них, автор намечает новое доказательство основной теоремы для случая тел. Ранее этот результат был получен референтом (Укр. матем. ж., 1950, **2**, № 1, 70—85; № 3, 94—99) и, независимо от него, автором совместно с Бруком (Bruck R. H., Kleinfeld E., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 878—890). Из теоремы (4.1) вытекает, что в альтернативном кольце, в котором четвертая степень любого коммутатора $= 0$, нильпотентные элементы образуют идеал. Благодаря результатам, полученным автором раньше (РЖМат, 1953, 614), достаточно рассматривать лишь такие простые неассоциативные альтернативные кольца R, у которых четвертая степень любого коммутатора $=0$ и характеристика $\neq 2$, или же те, у которых характеристика $= 2$ и имеются нильпотентные элементы. В первом случае из теоремы (4.1) выво-

дится, что R коммутативно. Из результатов, полученных ранее различными авторами, вытекает, что R является полем. Во втором случае результат Алберта (Albert A. A., Canad. J. Math., 1952, 4, № 2, 129—135) позволяет предположить, что в R не содержится нетривиальных идемпотентов. Можно также считать, что R некоммутативно. Эти предположения позволяют найти в R коммутатор, не лежащий в центре, и применить уже упоминавшиеся результаты автора. При рассмотрении второго случая также используется теорема (4.1). *Л. А. Скорняков*

1120. Геометрия трехмерного пространства над полем из трех элементов. Эдж (Geometry in three dimensions over $GF(3)$, Edge W. L.), Proc. Roy. Soc., 1954, A222, № 1149, 262—286 (англ.)

Рассматривается проективное пространство над полем из трех элементов — 1, 0, 1 с соответствующими операциями. $n-1$-мерное пространство такого рода состоит из $(3^n-1)/2$ точек. На плоскости ($n=3$) имеется одно и то же число (234) треугольников, четырехугольников, четырехсторонников и невырожденных кривых второго порядка. В трехмерном пространстве (которому посвящена основная часть работы) существуют невырожденные поверхности второго порядка следующих видов: линейчатые, называемые гиперболоидами, состоящие из 16 точек, и нелинейные, называемые эллипсоидами, содержащие по 10 точек. Изучаются геометрические свойства этих поверхностей в содержащем их пространстве и группы движений пространства с различными свойствами инвариантности. *Г. Е. Шилов*

1121. О независимости условий ассоциативности коммутативных мультипликативных структур. Сас (Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen. Szász G.), Acta sci. math., 1954, 15, № 2, 130—142 (нем.)

Если в множестве S введено коммутативное умножение, то S называется коммутативной мультипликативной структурой. Относительно данного действия тройка элементов (x, y, z) из S называется ассоциативной, если

$$(xy)z = x(yz),$$

и неассоциативной в противном случае.

Пусть число различных элементов S больше 3. Из множества всех троек элементов S, которое обозначим через Γ, выделено подмножество Γ', удовлетворяющее условиям:

1) если элементы a, b, c из S попарно различны, то в Γ' входят ровно две тройки, состоящие из этих элементов, причем одна из них не может быть получена из другой путем простого изменения порядка следования элементов на обратный;

2) если $a, b \in S$, $a \neq b$, то в Γ' содержится ровно одна из троек (a, a, b) или (b, a, a);

3) Γ' не содержит троек вида (a, a, a), где $a \in S$.

Доказывается, что если относительно данного действия все тройки из Γ' ассоциативны, то и все тройки из Γ ассоциативны, т. е. S является полугруппой.

Если $\Gamma'' \subset \Gamma'$, $\Gamma'' \neq \Gamma'$, то в S существует такое коммутативное действие, относительно которого все тройки из Γ'' ассоциативны, но некоторые из троек из Γ неассоциативны.

Всякое подмножество множества Γ, обладающее этими свойствами, само может быть получено как некоторое Γ' описанного типа.

В случае, когда количество элементов в S меньше четырех, результат оказывается несколько отличным. *Е. С. Ляпин*

См. также: 1131, 1132, 1133, 1134, 1188, 1374, 1375, 1382, 1383, 1395, 1398, 1505, 1507, 1508, 1513 РЕЦ

ТОПОЛОГИЯ

1122. Счетная паракомпактность в линейно упорядоченных пространствах. Болл (Countable paracompactness in linearly ordered spaces. Ball B. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 190—192 (англ.)

Известно, что всякое паракомпактное (т. е. обладающее тем свойством, что во всякое открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие) хаусдорфово пространство нормально. Линейно упорядоченное пространство всех счетных порядковых чисел нормально, но не паракомпактно. Автор показывает, что любое линейно упорядоченное пространство счетно паракомпактно в том смысле, что во всякое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие.

Ю. М. Смирнов

1123. Неприводимость суммы элементов непрерывного семейства континуумов. Дайер (Irreducibility of the sum of the elements of a continuous collection of continua. Dyer Eldon), Duke Math. J., 1953, 20, № 4, 589—592 (англ.)

Рассматривается такое непрерывное семейство G попарно не пересекающихся разложимых континуумов, что сумма G^* всех элементов семейства G также является континуумом. Доказано, что G^* не может быть неприводимым континуумом.

Р. Ю. Мацкина

1124. Теория сходимости. Мак-Шейн (A theory of convergence. McShane E. J.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 161—168 (англ.)

Дается весьма общее определение сходимости и доказывается несколько известных теорем теории сходимости применительно к этому определению. Приведем определение сходимости, данное автором. Непустая система γ непустых множеств Γ называется центрируемой (filter-base), если для любых Γ' и Γ'' из γ найдется такое множество $\Gamma \in \gamma$, что $\Gamma \subset \Gamma' \cap \Gamma''$. Пара (f, γ), состоящая из некоторого отображения f и какой-либо центрируемой системы $\gamma = \{\Gamma\}$ подмножеств области определения отображения f, называется синтаксом (syntax). Синтакс (f, γ), по определению, сходится в систему $\omega = \{U\}$ множеств из

области значений отображения f, если для каждого U найдется такое Γ, что $f(\Gamma) \subset U$.

Ю. М. Смирнов

1125. О регулярности гомеоморфизмов пространства E^n. Хомма, Киносита (On the regularity of homeomorphisms of E^n. Homma Tatsuo, Kinoshita Shin'ichi), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 365—371 (англ.)

Гомеоморфное отображение h компакта X на себя называется регулярным в точке $p \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho(p, x) < \delta$ для любого целого m следует $\rho(h^m(p), h^m(x)) < \varepsilon$ (Kerékjártó, Acta Litt. ac. Sci, Szeged, 1934, 6, 226—234).

Теорема 1. Пусть h — гомеоморфное отображение компакта X на себя. Если существуют такие две различные точки a и b, что: 1) для любой точки $x \in X \setminus b$ последовательность $\{h^m(x)\}$ сходится к a при $m \to +\infty$, 2) для любой точки $x \in X \setminus a$ последовательность $\{h^m(x)\}$ сходится к b при $m \to -\infty$, то h регулярно во всех точках компакта X, кроме a и b.

Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства X в себя. Обозначим через $Q(f)$ совокупность таких точек $x \in X$, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ не всюду плотно в X.

Теорема 5. Пусть X — локально компактное, но не компактное сепарабельное метрическое пространство, f — непрерывное отображение пространства X в себя. Тогда $Q(f)$ всюду плотно в X.

Теоремы 2—4 являются простыми следствиями теоремы 1.

В. А. Ефремович, А. С. Шварц

1126. Теорема об униформизации непрерывных функций и ее применение к доказательству теоремы Ф. Дайсона о непрерывных отображениях поверхности сферы. Заранкевич К., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 3, 115—118

Пусть S^n — единичная n-мерная сфера, X — ее подмножество. Через X^* обозначается множество, получаемое из X при помощи симметрии относительно центра сферы. Множество X называется антиподным, если $X = X^*$. Дайсоном была доказана следующая теорема (Dyson F. J., Ann. Math., 1951, 54, 534):

Пусть f — действительная непрерывная функция, определенная на S^2. Для всякого числа d, $0 < d < 2$, существует такой прямоугольник abb^*a^*, вписанный в S^2, что

$$|a - b| = d, f(a) = f(b) = f(a^*) = f(b^*).$$

Автор доказывает теорему, используя следующие предложения:

Лемма Куратовского. Если $F \subset S^n$ — замкнутое антиподное множество, состоящее из конечного числа компонент, то или F или его дополнение содержит антиподную компоненту.

Теорема. Пусть $f_i(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, — система m непрерывных функций, удовлетворяющих двум следующим условиям:

1) $\alpha = f_i(0) \leqslant f_i(x) \leqslant f_i(1) = \beta$ для $i = 1, 2, 3, \ldots, m$;

2) интервал $0 \leqslant x \leqslant 1$ можно разбить на конечное число интервалов, в которых функции $f_i(x)$ монотонны. Тогда существует такая система m непрерывных функций $g_i(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, что для всякого x имеем:

$$0 \leqslant g_i(0) \leqslant g_i(x) \leqslant g_i(1) = 1,$$

$$f_1(g_1(x)) = f_2(g_2(x)) = \ldots = f_m(g_m(x)).$$

Как указывает автор, доказательство этой теоремы будет опубликовано в журнале Fundam. Math.

А. Д. Тайманов

1127. Об одном аналитическом свойстве гомеоморфизмов, определенных на плоских континуумах. Куратовский К., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 1, 7—10

Пусть S_2 — плоскость комплексных чисел (с бесконечно удаленной точкой), A — замкнутое множество в S_2 и $S_2 \setminus A = R_0 \cup R_1 \cup \ldots$ — разложение множества $S_2 \setminus A$ на области-компоненты.

Пусть далее $p_j \in R_j$, $j = 0, 1, \ldots$, и f — непрерывная комплексная функция, заданная на A и принимающая значения, отличные от 0 и ∞. По теореме Эйленберга (Eilenberg S., Fundam. math., 1936, 26, 61—112) существует такая последовательность $k_0, k_1, \ldots, k_n$ отличных от нуля целых чисел, что (при соответствующей нумерации компонент множества $S_2 \setminus A$) имеем:

$$k_0 + \ldots + k_n = 0, \qquad (1)$$

$$f(z) \sim (z - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (z - p_n)^{k_n}, \qquad (2)$$

где $\sim$ означает гомотопность отображений (на евклидовой плоскости, лишенной точки 0).

Автор решает следующую проблему: найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять система $k_0, \ldots, k_n$, для того чтобы существовал локально связный континуум A и гомеоморфное отображение f континуума A, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Оказывается, что таким условием является соотношение

$$|k_0| + \ldots + |k_n| \leqslant 2n.$$

А. С. Пархоменко

1128. Решение некоторой проблемы П. Турана о графах. Заранкевич К., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1953, 1, № 5, 163—164

Формулируется без доказательства следующая теорема. Пусть на евклидовой плоскости даны два конечных точечных множества и

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p\} \text{ и } B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q\}.$$

Предположим далее, что для каждой пары точек a_i, b_j, где $i = 1, 2, 3, \ldots, p$, $j = 1, 2, 3, \ldots, q$, существует на плоскости простая дуга, соединяющая точки a_i и b_j, причем никакие три из этих дуг не имеют общей внутренней точки. Обозначим через $K(p, q)$ наименьшее число точек пересечения дуг, а через $L(p, q)$ — наименьшее число областей, на которые

разрезана плоскость всеми этими простыми дугами. Тогда справедливы следующие формулы:

$$K(2k, 2n) = (k^2 - k)(n^2 - n),$$
$$K(2k, 2n+1) = (k^2 - k)n^2,$$
$$K(2k+1, 2n+1) = k^2n^2,$$
$$L(2k, 2n) = (k^2 - k)(n^2 - n) + 4nk - 2(n + k) + 2,$$
$$L(2k, 2n+1) = (k^2 - k)n^2 + 4nk - 2n + 1,$$
$$L(2k+1, 2n+1) = n^2k^2 + 4nk + 1.$$

Эта теорема решает проблему П. Турана о нахождении числа $K(p, q)$.

Для каждой пары натуральных чисел p, q существует минимальный граф, на котором достигаются $K(p, q)$ и $L(p, q)$. Дается способ построения минимальных графов. Отмечается существенность предположения о том, что никакие три дуги не имеют общей внутренней точки. Указывается, что теорема остается в силе, если вместо простых дуг, соединяющих точки a_i и b_j, взять такие континуумы M_{ij}, соединяющие эти точки, что множества $M_{ij} - a_i - b_j$ связны.

Примечание референта. В статье употребляются термины «графа» и «континуа» вместо терминов «граф» и «континуумы», принятых в русской литературе. *Г. Н. Поваров*

1129. Об отображениях комплексов. Иоneда (On the mappings of complexes. Yoneda Nobuo), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1953, 6, 393—419 (англ.)

Пусть K и K' — два симплициальных разбиения конечного полиэдра P, имеющих общее звездное подразделение. Автор показывает, что существует такая конечная последовательность симплициальных разбиений $K = K_0, \ldots, K_n = K'$ полиэдра P и такая конечная последовательность $h_i(p, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, деформаций полиэдра P, что каждое отображение $h_i(p, 1)$ есть изоморфизм некоторого подразделения комплекса K_{i+1} на подразделение комплекса K_i. Автор показывает также, что каждое непрерывное отображение конечного полиэдра P в комбинаторное многообразие M может быть произвольно малой деформацией переведено в симплициальное отображение f симплициального разбиения полиэдра P, для которого $\max_{\sigma \in P} [\dim \sigma - \dim f(\sigma)] = \max[\dim P - \dim M, 0]$. С помощью этих результатов автор дает определение и доказательство инвариантности «абсолютной степени» отображения одного многообразия в другое, являющееся частным случаем «подкрученной степени» Олума (Olum P., Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, Vol. II. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952, 363—370; см. также РЖМат, 1954, 1596). *J. Dugundji*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 147.

1130. Новые топологические инварианты конечных полиэдров. У Вэнь-цзюнь (有限可剖分空間的新拓撲不變量. 吳文俊), 數學學報, (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 4, 261—290 (кит.; резюме англ.)

Излагается общий метод получения из гомотопических инвариантов пространств или систем пространств топологических инвариантов конечных полиэдров, вообще говоря, не являющихся инвариантами гомотопического типа. Показано, что числа Бетти конечного полиэдра выражаются через такие новые инварианты, но, конечно, не наоборот. Таким образом, эти новые инварианты являются более сильными, чем такие классические инварианты, как числа Бетти. *Резюме автора*

1131. О прямых и обратных спектрах топологических групп. Берикашвили Н. А., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 5, 257—264

Указаны новые формулировки ранее известных определений предельной группы прямого спектра топологических групп (Чогошвили Г. С., Матем. сб., 1951, 28, 87—117; Виленкин Н. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 503—532; Kaplan S., Duke Math. J., 1950, 17, 419—435), не использующие понятия сопряженного спектра. Отметим, что в определении референта понятие сопряженного спектра не использовалось, и для случая компактных групп определение референта в точности совпадает с определением автора (k'-ядра совпадают в этом случае с квазивыпуклыми окрестностями нуля). *Н. Я. Виленкин*

1132. Непрерывность и группы гомеоморфизмов. Эллис (Continuity and homeomorphism groups. Ellis Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 969—973 (англ.)

Рассматривается вопрос о введении в некоторую группу Φ гомеоморфизмов пространства X топологии, в которой естественное отображение $X \times \Phi \to X$ непрерывно. Получено много фактов, среди которых отметим следующий: Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности и со счетным всюду плотным множеством и пусть X является абелевой группой, умножение которой односторонне непрерывно. Тогда X — топологическая группа.

Изучаются и другие вопросы аналогичного характера. *М. М. Постников*

1133. О локально компактных простых группах. Понсе (Sur les groupes simples localement compacts. Poncet Jean), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 2, 192—194 (франц.)

Изучаются компактные фактор-пространства локально компактных, связных групп, не имеющих компактных фактор-групп. Устанавливаются условия, при выполнении которых некоторые множества фактор-пространства всюду плотны. В предпосланном работе резюме утверждается, что связная простая локально компактная группа обладает всюду плотной подгруппой с конечным числом образующих. В тексте работы соответствующего утверждения не содержится. *М. М. Постников*

1134. О локально компактных простых группах. Понсе (Sur les groupes simples localement compacts. Poncet Jean), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 3, 316—317 (франц.)

Продолжение заметки автора (см. реф. 1133). Упомянутая в реф. 1133 теорема здесь доказывается. *М. М. Постников*

См. также: 1197, 1198, 1199, 1371, 1377

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1135. Вторая теорема о среднем для двойного интеграла. Тевзадзе (მეორე თეორემა ორჯერადი ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის შესახებ. თევზაძე ნ.), Труды Тбилис. ун-та (Тр. Тбилис. ун-та), 1953, 48, 65—74 (груз.; резюме русс.)

Дается более простое доказательство следующей теоремы, впервые доказанной Юнгом в 1916 г.:

Если в прямоугольнике $R=[a_1, b_1; a_2, b_2]$ определены две функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, причем $f(x, y)$ суммируема на R, а $\varphi(x, y)$ является не убывающей на R, т. е. для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из R, где $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$, $\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) \geqslant 0$, $\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) \geqslant 0$, то в R найдется такая точка (ξ, η), что

$$\iint_R f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \varphi(b_1, b_2) \int_{\xi}^{b_1}\int_{\eta}^{b_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Теорема применяется для оценки коэффициентов Фурье функции двух переменных. *В. Г. Челидзе*

1136. Качественная асимптотическая непрерывность. Маркус (Continuitatea aproximativă calitativă. Marcus S.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 3—4, 117—120 (рум.; резюме русс., франц.)

Для действительной функции $f(x)$, определенной в топологическом пространстве, автор вводит понятие качественной асимптотической непрерывности в точке x_0, используя понятие качественного асимптотического предела (РЖМат, 1955, 158). Отмечается, что функция, обладающая свойством Бэра, будет с точностью до множества первой категории качественно непрерывной. Формулируется необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовала качественно непрерывная (кроме точек неплотного множества) функция $H(x, y)$, совпадающая с данной линейно непрерывной в области G функцией $F(x, y)$ в точках, где последняя непрерывна. *П. И. Романовский*

1137. Качественная асимптотическая производная. Маркус (Derivata aproximativă calitativă. Marcus S.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 11—12, 361—364 (рум.; резюме русс., франц.)

Автор называет действительную функцию $f(x)$ действительного переменного качественно дифференцируемой в точке x_0, если $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ имеет качественный асимптотический предел при $x \to x_0$.

Отмечаются некоторые свойства введенного понятия. *П. И. Романовский*

1138. Нули неопределенных интегралов некоторого класса. Ливингстон (The zeros of a certain class of indefinite integrals. Livingston Arthur E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 296—300 (англ.)

Исследуются неопределенные интегралы

$$F(x) = \int_x^{\infty} f(t)\,g(t)\,dt$$

при следующих предположениях относительно функций $f(t)$ и $g(t)$:

1) $f(t)$ неотрицательна, суммируема на сегменте $[0, 1]$ и $f(t+n) = (-1)^n f(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $f(t) \not\equiv 0$ ни в каком подинтервале сегмента $[0, 1]$;

3) $g(t) > 0$ для $t \geqslant 0$ и произведение $f(t)\,g(t)$ суммируемо на $[0, 1]$;

4) $g(t)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$;

5) $g(t)$ имеет точку убывания в каждом интервале $(n_k, n_k + 1)$, где $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая бесконечная последовательность различных неотрицательных целых чисел;

6) $g(n+1)/g(n) \to 1$ при $n \to \infty$;

7) $g(t) - g(t+1)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$.

Доказывается, что при выполнении условий 1)—5) $F(x)$ не сохраняет постоянного значения ни в каком интервале, имеет относительный максимум (минимум) в точках $x = 2n$ $(x = 2n+1)$, обращается в нуль в одной точке z_n каждого интервала $(n, n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$, и $0 \leqslant (-1)^n F(n)/g(n) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$.

Если N — последовательность целых неотрицательных чисел, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и выполнены условия 1)—6), то для того чтобы

$$(-1)^n F(n)/g(n) \to \int_0^{\alpha} f(t)\,dt \quad \text{при} \quad n \to \infty,\ n \in N,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$z_n - n \to \alpha \quad \text{при} \quad n \to \infty,\ n \in N.$$

Если C определить так, что $0 < C < 1$ и $2\int_C^0 f(t)\,dt = \int_1^0 f(t)\,dt$, то из условий 1)—5) и 7) следует, что

$$z_n - n \geqslant C.$$

Если выполнены все условия 1)—7), то при $n \to \infty$

$$(-1)^n \frac{F(n)}{g(n)} \to \int_0^C f(t)\,dt$$

и

$$z_n - n \to C.$$

Ф. И. Харшиладзе

1139. Доказательство одного предложения о кратных интегралах Римана. Мор (Beweis eines Satzes über Riemannsche Gebietsintegrale. Mohr Ernst), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 391—392 (нем.)

Дается элементарное доказательство теоремы Арцела о предельном переходе под знаком интеграла для ограниченных сходящихся последовательностей функций, интегрируемых вместе с предельной функцией в смысле Римана. Доказательство не опирается на теорию меры и интеграла Лебега и применимо к случаю любого числа измерений. *Б. И. Коренблюм*

1140 К. Аддитивные функции множества и интегрирование в абстрактных пространствах. Кафьеро (Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazi astratti. Cafiero Federico, 178 pp., Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1953) (итал.)

Общие понятия и обозначения, которые некоторыми математиками сейчас считаются устаревшими, не отличаются значительно от имеющихся в главе 1 книги Сакса «Теория интеграла». Материал включает абстрактную переформулировку равномерной абсолютной непрерывности (Дубровский В. М., Матем. сб., 1947, 20(62), 317—329) и формулировку автора соответствующей теоремы Витали. Доказательство хорошо известной теоремы Никодима приведено в новой форме. Автор включил также изложение теоремы Банаха — Куратовского, согласно которой, допуская континуум-гипотезу, вполне аддитивная функция множества, определенная на всех подмножествах пространства мощности континуум, тождественно равна нулю, если она равна нулю на конечных множествах.

Имеется одно место, которое референт не мог понять и которое касается теоремы распространения, воспроизведенной из статей и лекций Каччополи. Эта теорема распространения появилась в ответ на возражение, сделанное Радо и Рейхелдерфером (Radó T., Length and area, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., New York, 1948, 30, 421 p.). Ее различные формы встречаются в нескольких местах в авторском тексте, и их смысл неясен из-за первоначальной опечатки (в условии α) на стр. 15).

L. C. Young

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 110.

1141 К. Теория функций действительного переменного. Фролов Н. А. (Учеб. пособие для пед. ин-тов), 164 стр., Учпедгиз, М., 1953

Книга является учебным пособием, предназначенным для студентов педагогических институтов. В ней в доступной форме изложены вопросы теории функций действительного переменного, предусмотренные программой педвузов. В книге имеется глава, освещающая роль советских ученых в развитии теории функций действительного переменного. В конце дано небольшое число (26) задач, относящихся к рассматриваемым вопросам.

Содержание книги по главам: 1. Общая теория множеств (понятие множества, мощность, счетные множества и т. п.); 2. Множество действительных чисел; 3. Теория точечных множеств; 4. Функции (непрерывные и равномерно непрерывные функции, классификация точек разрыва, функции с ограниченным изменением); 5. Непрерывные кривые (кривые Жордана и Пеано, спрямляемые кривые); 6. Измерение множеств (теория меры по Жордану и Лебегу, операции над измеримыми множествами, понятие измеримой функции); 7. Интеграл Римана; 8. Интегралы Лебега (краткое изложение теории интеграла Лебега).

М. К. Керимов

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1142. Утверждение, эквивалентное обобщенной континуум-гипотезе. Фодор (An assertion which is equivalent to the generalized continuum hypothesis. Fodor G.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 77—78 (англ.)

Пусть E есть множество мощности $2^{\aleph_\alpha}$, а B — множество всех подмножеств множества E, состоящих только из двух элементов. Доказывается, что обобщенная континуум-гипотеза эквивалентна следующему утверждению:

Существует отображение T множества B в множество E такое, что:

1) для каждого $r = \{x, y\} \in B$ имеем либо $Tr = x$, либо $Tr = y$;

2) для каждого подмножества E_1 мощности $> \aleph_\alpha$ сумма множеств $r \in B$, для которых $Tr \in E_1$, равна E.

В работе допущены следующие опечатки: 1) стр. 77, 7 строка снизу, напечатано $UT^{*-1}x_\gamma = \{x_\gamma\}_{\varkappa \leqslant \gamma}$, следует читать $UT^{*-1}x_\gamma = \{x_\varkappa\}_{\varkappa \leqslant \gamma}$; 2) стр. 78, 12 строка сверху, напечатано $\leqslant \aleph$, следует читать $\leqslant \aleph_\alpha$.

З. И. Ковлова

1143. Об одном утверждении, эквивалентном обобщенной континуум-гипотезе. Фодор (Über eine mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese äquivalente Behauptung. Fodor G.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 232—234 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Доказывается, что следующее утверждение эквивалентно гипотезе $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. В прямом произведении $M \times M$, где M — множество мощности $2^{\aleph_\alpha}$, существует подмножество E со следующими двумя свойствами: 1) для всякого $x_0 \in M$ мощность пересечения $E \cap (\{x_0\} \times M)$ не превосходит $\aleph_\alpha$; 2) всякое подмножество $A \subseteq M$ мощности большей $\aleph_\alpha$ содержит такой элемент y_0, что мощность пересечения $E \cap (A \times \{y_0\})$ равна мощности A.

В. А. Успенский

1144. Одно утверждение, эквивалентное обобщенной континуум-гипотезе. Кечкеметь (Eine Behauptung, die mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese äquivalent ist. Ketskeméty I.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 235—236 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество мощности $2^{\aleph_\alpha}$. Каждому непустому конечному подмножеству $\mathfrak{M}$ сопоставляется некоторый элемент этого подмножества. Доказывается, что гипотеза $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ эквивалентна утверждению

(B) Существует такое сопоставление указанного выше вида, при котором каждый элемент $x \in \mathfrak{M}$ сопоставляется самое большее $\aleph_\alpha$ конечным подмножествам $\mathfrak{M}$.

Следующее утверждение является следствием (B) при $\alpha = 0$ и, таким образом, следствием обычной континуум-гипотезы: n-мерное евклидово пространство можно представить как сумму непересекающихся множеств $\mathfrak{E}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) так, что каждое $\mathfrak{E}_i$ пересекается с каждой $(n-1)$-мерной гиперплоскостью, ортогональной к i-й координатной оси, по не более чем счетному множеству.

В. А. Успенский

1145. О некоторых новых результатах, касающихся континуум-гипотезы. Серпинский (Sur quelques résultats nouveaux concernant l'hypothèse du continu. Sierpinski Waclaw), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 440 (франц.)

Утверждается, что любые два из следующих трех предложений эквивалентны (в них m и n означают бесконечные кардинальные числа, причем $n < m$, а M — множество мощности m):

1. Не существует кардинального числа p такого, что $n < p < m$.

2. Декартово произведение $M \times M$ является суммой двух множеств ε_1 и ε_2 таких, что для $i = 1, 2$ множество ε_i имеет не более n точек на каждой параллели оси OX_i.

3. Декартово произведение $M \times M \times M$ является суммой трех множеств ε_i $(i = 1, 2, 3)$ таких, что для $i = 1, 2, 3$ множество ε_i имеет менее чем n точек на каждой параллели оси OX_i.

А. С. Есенин-Вольпин

1146. Характеристика порядковых типов, удовлетворяющих равенству $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_0$. **Аронштайн** (Characterization of types of order satisfying $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_0$. Aronszajn N.), Fundam. math., 1952, 39, 65 — 96 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть X — некоторое множество действительных чисел, а $\{X_i\}_{i \in I}$ — разбиение множества X на промежутки X_i (т. е. непустые подмножества со свойством: если $a, b \in X_i$, $x \in X$ и $a < x < b$, то $x \in X_i$). Пусть T — полуподобие множества X на себя относительно разбиения $\{X_i\}_{i \in I}$, т. е. взаимно однозначное отображение множества X на себя такое, что все множества $T(X_i)$ являются промежутками множества X и T является подобием на каждом из множеств X_i. Пусть $<$ — отношение, упорядочивающее множество I, определенное условием: $i < j$, если $x < y$ для $x \in X_i$, $y \in X_j$, и пусть $\prec$ — отношение, упорядочивающее множество I, определенное условием: $i \prec j$, если $x < y$ для $x \in T(X_i)$ и $y \in T(X_j)$. Множество I, упрядоченное отношением $<$ ($\prec$), обозначим через $I_<$ ($I_\prec$).

Если $\gamma(\xi)$ — произвольная функция, определенная на X, значениями которой служат порядковые типы, такая, что: 1) $\gamma(\xi)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком промежутке X_i; 2) $\gamma(\xi_1) = \gamma(\xi_2)$, если $\xi_2 = T^m(\xi_1)$ для некоторого целого числа m, — то порядковые типы

$$\alpha_i = \sum_{\xi \in X_i} \gamma(\xi) \qquad (i \in I) \tag{1}$$

удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i \in I_<} \alpha_i = \sum_{i \in I_\prec} \alpha_i. \tag{2}$$

Наоборот, если $I_<$ и $I_\prec$ — два упорядочения множества I, подобные некоторому множеству действительных чисел, и если выполняется равенство (2), где α_i — порядковые типы и $\alpha_i \neq 0$ для каждого $i \in I$, то типы α_i имеют вид (1).

Поэтому приведенное утверждение дает ответ на вопрос, когда перестановка слагаемых α_i не меняет суммы (2) при условии, что оба упорядочения множества слагаемых подобны некоторому множеству действительных чисел. В случае, когда $I = \{0, 1\}$, автор дает ответ на вопрос, когда порядковые типы α_0, α_1 перестановочны: для того чтобы $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

a) $\alpha_0 = \alpha_1\omega + \delta + \alpha_1\omega^*$,

b) $\alpha_1 = \alpha_0\omega + \delta + \alpha_0\omega^*$,

c) $\alpha_0 = \gamma_0 + \sum_{0<\xi<\xi_0} \gamma(\xi) + \gamma_1$ и $\alpha_1 = \gamma_0 + \sum_{\xi_0<\xi<1} \gamma(\xi) + \gamma_1$, где $0 < \xi_0 < 1$, γ_0, γ_1, $\gamma(\xi)$ — порядковые типы, функция $\gamma(\xi)$ определена в промежутке $0 < \xi < 1$ и удовлетворяет условиям: 1) $\gamma(\xi_1) = \gamma(\xi_2)$, если $\xi_2 - \xi_1 = m + m_0\xi_0$ для некоторых целых чисел m и m_0; 2) $\gamma(\xi) = \gamma_1 + \gamma_0$, если $\xi = m + m_0\xi_0$ для некоторых целых чисел m и m_0.

R. Sikorski

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1147. О некоторых свойствах рядов Фурье. **Меньшов Д. Е.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 4, 379—388

Автор называет классом типа (α) всякий класс K функций $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, обладающий свойствами: а) все функции класса K суммируемы на $[-\pi; \pi]$; б) если $f(x) \in K$, а $f_0(x)$ измерима на $[-\pi, \pi]$ и $|f_0(x)| \leqslant |f(x)|$, то $f_0(x)$ также входит в K.

Доказана теорема: Если K есть класс типа (α), то любую функцию $f(x) \in K$ можно представить в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) \in K$ и $f_2(x) \in K$, причем ряд Фурье от $f_1(x)$ сходится к нулю на множестве E_1, ряд Фурье от $f_2(x)$ сходится к нулю на множестве E_2, и каждое из этих множеств имеет положительную меру на любом сегменте $[\alpha, \beta]$, лежащем на $[-\pi, \pi]$, а $m(E_1 + E_2) = 2\pi$. *Н. К. Бари*

1148. Поправка к статье «Тригонометрические нуль-ряды в дифференциальных уравнениях». **Уамсли** (Correction to «Null trigonometric series in differential equations». Walmsley Charles), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 447—448 (англ.)

В рассуждениях § 3 (стр. 538) и § 4 (стр. 542) указанной статьи (РЖМат, 1954, 3665) применяя к тригонометрическим рядам известную теорему о множителях сходимости, утверждающую, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируем методом (C, k), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n / n^s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ суммируем методом $(C, k - s)$, автор не различает случаев четного и нечетного s. Когда s нечетно, то выводы уже касаются соответствующих сопряженных рядов. Поэтому для их справедливости предлагается теорему на стр. 541 дополнить условием: проинтегрированный ряд $\sum_{n \neq 0} \gamma_n e^{inx} / n$ суммируется методом $(C, k - 1)$ или сходится равномерно, как в условии (ii) данной теоремы. *А. Ф. Тиман*

1149. Об одной теореме Зигмунда о сопряженных функциях. **Жак И. Е.**, Докл. АН СССР, 1954, 97, № 3, 387—389

Согласно теореме И. И. Привалова, если функция $f(x)$ периода 2π принадлежит к классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, то сопряженная функция обладает тем же свойством; для $\alpha=1$ эта теорема теряет силу, но имеет место теорема Зигмунда: если $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=O(h^\alpha)$ равномерно относительно x и $0<\alpha\leqslant 1$, то сопряженная функция обладает тем же свойством.

Для случая функции двух переменных $f(x,y)$ сопряженными с ней функциями называются функции

$$\overline{f}_1(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+s,y)-f(x-s,y)]\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,ds,$$

$$\overline{f}_2(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x,y+t)-f(x,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

и

$$\overline{f}_3(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi [f(x+s,\ y+t)-f(x-s,\ y+t)-$$
$$-f(x+s,y-t)+f(x-s,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,ds\,dt.$$

Автором было показано ранее (Докл. АН СССР, 1952, **87**. № 6, 877—880), что если $f(x,y)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, то $\overline{f}_1(x,y)$, $\overline{f}_2(x,y)$ и $\overline{f}_3(x,y)$ принадлежат классу $\mathrm{Lip}\,\alpha'$, $0<\alpha'<\alpha$, причем позже он показал (Матем. сб., 1952, **31 (73)**, № 3, 469—484), что число α', вообще говоря, нельзя заменить на α.

В реферируемой работе на примере показывается, что и теорему Зигмунда нельзя перенести на функции двух переменных. Точнее говоря, если условиться писать $f(x,y)\in Z^{(\alpha)}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, когда

$$f(x+h,y+\eta)+f(x-h,y-\eta)-2f(x,y)=$$
$$=O(h^\alpha)+O(\eta^\alpha)$$

равномерно относительно (x,y), то из $f(x,y)\in Z^\alpha$ не следует, вообще говоря, что сопряженные с ней функции принадлежат $Z^{(\alpha)}$ (хотя они принадлежат $Z^{(\alpha')}$ при $\alpha'<\alpha$). Это обстоятельство имеет место как при $0<\alpha<1$, так и при $\alpha=1$. *Н. К. Бари*

1150. Замечание о расходимости рядов Фурье непрерывных функций. Т а н д о р и (Bemerkung zur Divergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen. T a n d o r i K á r o l y), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 191—193 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Строится пример непрерывной функции $f(x)$ с периодом 2π, частные суммы ряда Фурье которой равномерно ограничены, однако же ряд Фурье расходится на некотором множестве типа F_σ, имеющем мощность континуума в каждой порции сегмента $[0,2\pi]$. Конструкция основана на сгущении особенностей, создаваемых с помощью полиномов Фейера

$$Q(x,\mu,n)=2\sin(\mu+n)x\sum_{k=1}^{n}(\sin kx)/k$$

(в статье опечатка: потерян множитель 2 в этой формуле). *Ф. В. Широков*

1151. Об одной проблеме аппроксимации почти периодических функций. Ч и н к у и н и (Sopra il problema dell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche. C i n q u i n i S i l v i o), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 66—67 (итал.)

Пусть $F(x)$ и $F'(x)$ — почти периодические функции соответственно в смысле Бора и в смысле Степанова. Тогда

$$\lim_{q\to\infty}\lim_{-\infty<\alpha<\infty}\sup\int_\alpha^{\alpha+1}|F'(x)-\tau'_{B_q}(x;F)|\,dx=0,$$

причем $\tau_{B_q}(x;F)$ образуют последовательность полиномов Бохнера — Фейера для $F(x)$. Это утверждение легко следует из (также легко получаемого) равенства

$$\tau'_{B_q}(x;F)=\tau_{B_q}(x;F').$$

Б. М. Левитан

1152. Условие необходимое и достаточное, чтобы почти возрастающая четная функция была слабо весовой. Б е р н ш т е й н С. Н., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 4, 487—490

Рассмотрим четные монотонно возрастающие (при $x>0$) функции $\Phi(x)\geqslant 1$ и предположим, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\Phi(x)}=0.$$

Функция $\Phi(x)$ называется слабо весовой, если для любого $p>0$ и любой непрерывной функции $f(x)$ $(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0)$ можно построить такую последовательность целых функций $G_{p,n}(x)$ степени p, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x)-G_{p,n}(x)|}{\Phi(x)}=0 \qquad (1)$$

равномерно на всей действительной оси.

В реферируемой заметке установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $\Phi(x)$ была слабо весовой.

Т е о р е м а. Пусть $H_p(x)$—целые функции фиксированной степени $p>0$ с четным модулем $|H_p(x)|$ $(|H_p(0)|>0)$, удовлетворяющие неравенству

$$|H_p(x)|\leqslant\Phi(x)\quad(-\infty<x<\infty).$$

Для того чтобы $\Phi(x)$ была слабо весовой функцией, необходимо и достаточно, чтобы была бесконечна верхняя грань L_p выражения

$$|H_p(0)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$$

для всех рассматриваемых функций $H_p(x)$, где $\alpha_k+i\beta_k$ — корни $H_p(x)$.

Если функция $\Phi(x)$ не является слабо весовой, то соотношение (1) не имеет места для любой непрерывной функции. Характеристика тех функций $f(x)$, которые удовлетворяют (1), дается теоремой:

Если четная монотонно возрастающая функция $\Phi(x)>0$ не является слабо весовой и если для функции $f(x)$ можно найти последовательность $G_{p,n}(x)$ целых функций степени p таких, что имеет

место (1), то

$$f(x) = e^{hx^2} S(x),$$

где $S(x)$ — целая функция первого рода, корни которой $\alpha_k + i\beta_k$ подчинены условиям

$$\sum{}' \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} < \infty, \quad \sum{}' \frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} < \infty.$$

К. И. Бабенко

1153. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов. Ахиезер Н. И., Бернштейн С. Н., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 6, 1109—1112

Пусть C_Φ — пространство непрерывных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, подчиненных условию $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0$, с нормой

$$\|f\|_\Phi = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x)|}{\Phi(x)}.$$

где $\Phi(x) > 0$ $(-\infty < x < \infty)$.

Если в пространстве C_Φ множество многочленов плотно, то Φ называется весовой функцией. Ранее С. Н. Бернштейном (РЖМат, 1953, 170) было установлено необходимое и достаточное условие для того, чтобы четная неубывающая при $x > 0$ функция $\Phi(x)$ была весовой.

В реферируемой заметке авторы снимают ограничение четности и монотонности. Доказывается теорема:

Чтобы функция $\Phi(x) \geqslant 1$ $(-\infty < x < \infty)$ была весовой, необходимо и достаточно существование последовательности многочленов $R_{n_i}(x)$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$, положительных на всей оси и удовлетворяющих соотношениям

$$0 < \sqrt{R_{n_i}(x)} \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\lim_{i \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln R_{n_i}(x)}{1 + x^2}\, dx = \infty.$$

Из этой теоремы следует теорема М. Рисса:

Если проблема моментов Гамбургера

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\sigma(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

неопределенная, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \frac{s_0}{\rho(x)}}{1 + x^2} dx < \infty,$$

где $\rho(x)$ означает максимальную массу, которая может быть сосредоточена в точке x при условии (1).

К. И. Бабенко

1154. Исследование предельного перехода от средних степенных приближений к чебышевским. Калиновская (Дослідження граничного переходу від середніх степеневих наближень до чебишовських.) Калиновська С. С.), Наукові зап. Луцького пед. ін-ту, сер. физ.-матем., 1953, № 1, 25—50 (укр.)

Речь идет (для одномерного случая) о предельном (при $m \to \infty$) переходе

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |\Phi_m(x)|^m\, dx\right\}^{1/m} \to \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\Phi(x)|,$$

где $\Phi(x)$ — отклонение данной функции от ее наилучшего приближения в смысле Чебышева, а $\Phi_m(x)$ — ее отклонение от наилучшего степенного, степени m, приближения. Приближающие многочлены предполагаются обобщенными, однако равномерно непрерывными (как и сама приближаемая функция) в рассматриваемой области. Что касается самой этой области, то интерес автора сосредоточивается около многомерного случая, причем в качестве основной области E берется равномерно или квазиравномерно концентрированное множество. Под модулем концентрации множества E около точки x подразумевается выражение

$$\psi(h) = \inf_{h \leqslant r \leqslant h_0} \frac{\mu[E \cap S(x, r)]}{\mu S(x, r)},$$

где $S(x, r)$ — сфера с центром x радиуса r, μ означает меру Лебега, h_0 — постоянное, h — переменное положительное число; концентрация считается равномерной, если $\psi(h) \geqslant A > 0$, квазиравномерной (относительно модуля $\underline{\psi}(h)$), если $\psi(h) \geqslant A\underline{\psi}(h)$ $(A > 0)$ ($\underline{\psi}(h)$ — минорантный модуль концентрации).

Основной результат работы состоит в установлении соотношений между минорантным модулем концентрации и порядком убывания (при $m \to \infty$) величины

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sup\limits_{x \in E} |\Phi_m(x)|}{\sup\limits_{x \in E} |\Phi(x)|} - 1\right\}.$$

Эти соотношения конкретизируются на стр. 39 в виде таблицы, где приведены оценки α_m для разнообразных минорантных модулей концентрации, начиная со степенного $\psi(h) = h^t$ $(t > 0)$ и далее, в соответствии с логарифмической шкалой.

Автор отмечает, что учет концентрации множества E вводится им впервые, тогда как этот фактор отсутствовал в предшествовавших работах Е. Я. Ремеза (к которым примыкает данная статья).

В. Л. Гончаров

1155. О точке, наименее уклоняющейся (в смысле П. Л. Чебышева) от данной системы точек. Зуховицкий (Про точку, що найменш відхиляється (в розумінні П. Л. Чебишова) від даної системи точок. Зуховицький С. І.), Наукові зап. Луцького пед. ін-ту, сер. физ.-матем., 1953, № 1, 3—24 (укр.)

Рассматривается задача: в n-мерном евклидовом пространстве задано m точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$: требуется найти точку P^*, для которой достигает минимума величина

$$\max_i \rho(P, P_i),$$

где $\rho(P, P_i)$ — расстояние между P и P_i. Искомая

точка называется чебышевской точкой (ч. т.) данной системы. Автор указывает алгоритм для построения ч. т. данной системы и замечает, что существование ч. т. непосредственно следует из конечности этого алгоритма. (Это следует, впрочем, и из общей теоремы теории функций. *Прим. реф.*)

Последовательно рассмотрены случай плоскости, случай трехмерного пространства, общий случай (§§ 1—3); последний параграф 4 посвящен случаю взвешенных расстояний. *В. Л. Гончаров*

1156 Д. О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых периодических функций. Дзядык В. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1954

См. также: 1058 К, 1126, 1373, 1389 К

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1157. Об аналитической функции, имеющей бесконечное число независимых действительных периодов. Смит (On an analytic function having an infinite number of independent real periods. Smith R. A.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 2, № 114, 255—256 (англ.)

1158. Критические точки рациональных функций с самоинверсными полиномиальными множителями. Бонсалл, Марден. (Critical points of rational functions with self-inversive polynomial factors. Bonsall F. F., Marden Morris), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 111—114 (англ.)

Многочлен $f(z)$ называется самоинверсным, если его нули симметричны относительно окружности $|z|=1$. Пусть $N(\varphi, E)$, $P(\varphi, E)$ и $Q(\varphi, E)$ означают соответственно число нулей, число полюсов с учетом кратности и число различных полюсов функции $\varphi(z)$ на множестве E.

Теорема. Пусть $\varphi(z)=f(z)\,g(z)/F(z)\,G(z)$, где f, g, F, G — многочлены, f и F самоинверсны, $N(g, |z|>1)=N(G, |z|<1)=0$ и степень fg выше степени FG; тогда

$$N(\varphi', |z|>1)=N(\varphi, |z|>1)+Q(\varphi, |z|\geqslant 1).$$

Частные случаи теоремы рассматривались ранее (Cohn A., Math. Z., 1922, **14**, 110—148; Walsh J. L., Location of the critical points, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1950, v. 34; Bonsall F. F., Marden M, Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 471—475).

В качестве леммы доказывается следующее обобщение теоремы Руше: если в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной спрямляемой кривой γ, функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические кроме быть может, полюсов в D, и, кроме того, на границе γ $|g(z)|<|f(z)|$, то

$$N(f+g, D)-P(f+g, D)=N(f, D)-P(f, D).$$

П. К. Суетин

1159. О кривизне линий уровня. Верблюнский (On the curvature of level curves. Verblunsky S.), Math. Ann., 1953, **125**, № 5, 472—476 (англ.)

Пусть $\psi(\zeta)=\alpha+i\beta$, где $\zeta=re^{i\theta}$, регулярна в $|\zeta|\leqslant 1$. Рассмотрим функцию $w(\zeta)$, определенную с точностью до постоянного слагаемого уравнением

$$w'(\zeta)=\exp\psi(\zeta),$$

которая будет регулярной в $|\zeta|\leqslant 1$, причем $w'(\zeta)\neq 0$. Образ $r=\text{const}$ при преобразовании $|\zeta|\leqslant 1$ с помощью $w=w(\zeta)$ есть замкнутая кривая Γ (линия уровня), кривизну которой обозначим $K(\zeta)$.

Положим

$$\delta=e^{\alpha}(1-r^2),$$

$$\rho=\left|\frac{1}{2}(1-r^2)\,\psi'-\overline{\zeta}\right|.$$

Дается сравнительно простое доказательство следующего утверждения, полученного ранее Пешлем (Peschl E., Math. Ann., 1932, **106**, 574—594):

Если k — действительная постоянная и $(1-\rho^2)/\delta\geqslant k$ при $|\zeta|<1$, то это неравенство справедливо и при $|\zeta|=1$.

Используя этот результат, автор доказывает теорему:

Если $K(e^{i\theta})\geqslant k$, то $K(\zeta)\geqslant 2k[1+\sqrt{1-k\delta}]^{-1}$.

В. Н. Телиянц

1160. О рядах Тейлора функций, регулярных в областях Гайера. Эрдёш, Херцог, Пиранян (On Taylor series of functions regular in Gaier regions. Erdös Paul, Herzog Fritz, Piranian George), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 39—52 (англ.)

Известна лемма Гайера (Gaier D., Math. Z., 1952, 56, 326—334): если функция $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ регулярна и ограничена в круге $|z+a|<1+a$ $(a>0)$, то $a^n=O(n^{-1/4})$.

Авторы показывают, что в лемме Гайера O, вообще говоря, нельзя заменить на o, и обобщают эту лемму в различных направлениях.

1. Если функция $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ регулярна в круге $|z+a|<1+a$ $(a>0)$ и если произведение $(1-z)^k f(z)$, где k — действительное число, ограничено в этом круге, то

$$\begin{aligned} a_n &= O(n^{k-1}), && \text{если } k>1,\\ a_n &= O(\ln n), && \text{если } k=1,\\ a_n &= O(n^{(k-1)/2}), && \text{если } k<1. \end{aligned} \qquad (1)$$

В равенствах (1) O, вообще говоря, нельзя заменить на o; такая замена допустима, если $k\leqslant 1$ и произведение $(1-z)^k f(z)$ стремится к пределу, когда $z\to 1$.

2. Если функция $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ удовлетворяет условиям предложения 1 и если $S_n=\sum_n^{2n}|a_j|$, то

$$S_n = O(n^k), \quad \text{если } k > 1/2,$$
$$S_n = O(\sqrt{n \ln n}), \quad \text{если } k = 1/2, \qquad (2)$$
$$S_n = O(n^{k/2+1/4}), \quad \text{если } k < 1/2.$$

В первом и третьем равенствах (2) O нельзя заменить на o.

3. Если функция $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ удовлетворяет условиям предложения 1 для $k < -1/2$, то $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$ и $\sum_0^\infty n |a_n|^2 < \infty$.

4. Если функция $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ удовлетворяет условиям предложения 1 для $k < 0$, то ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ сходится равномерно на окружности $|z| = 1$.

Областью Гайера авторы называют всякую открытую область, которая содержит единичный круг $|z| < 1$ и граница которой имеет с окружностью $|z| = 1$ только одну общую точку $z = 1$. Областью Гайера порядка p ($p > 0$) называется такая область Гайера, которая содержит в себе внутренность кривой

$$z(\varphi) = (1 + c|\varphi|^p) \exp(i\varphi), \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

для некоторого положительного значения c.

Доказывается предложение:

5. Если функция $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ регулярна в какой-нибудь области Гайера порядка p ($p \geqslant 1$) и если при $k < 1$ произведение $(1-z)^k f(z)$ ограничено в этой области, то $a_n = O(n^{(k-1)/p})$. Библиография, 12 названий.

Н. А. Давыдов

1161. Общее мажорирование многочлена и его производной и одно его следствие. К о л у ч ч и (Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza. C o l u c c i A n t o n i o), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, № 3, 258—260 (итал.)

Доказываются теорема и ее следствие.

Т е о р е м а. Если корни многочлена с комплексными коэффициентами от комплексной переменной z:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

по модулю не превосходят некоторого числа ρ, то имеет место формула мажорирования

$$\left| P^{(k)}(z) \right| \leqslant k! \binom{n}{k} |a_0| (|z| + \rho)^{n-k},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ и $P^{(0)}(z) = P(z)$.

С л е д с т в и е. Если корни многочлена

$$P_n(z) = p_{n,n} z^n + \ldots + p_{n,1} z + p_{n,0}$$

($n = 1, 2, \ldots$) по модулю не превосходят ρ и последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n p_{n,n}|} = \frac{1}{R},$$

где R конечно и больше ρ, то ряд

$$a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z) + \ldots + a_n P_n(z) + \ldots$$

представляет функцию $f(z)$, голоморфную внутри круга, описанного из точки $z = 0$ радиусом $R - \rho$, и сверх того

$$f^{(k)}(z) = a_k P_k^{(k)}(z) + a_{k+1} P_{k+1}^{(k)}(z) + \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Н. С. Кошляков

1162. Об одном классе функций, однолистных в единичном круге. Ш и л д (On a class of functions schlicht in the unit circle. S c h i l d A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 115—120 (англ.)

Пусть S_p — класс функций, однолистных в круге $|z| < 1$ и не однолистных ни в каком круге большего радиуса.

Для многочленов $f_p(z) = z - \sum_2^N a_n z^n$, $N \geqslant 2$, с действительными и неотрицательными коэффициентами a_n, $n = 2, 3, \ldots, N$, доказывается, что необходимым и достаточным признаком их принадлежности классу S_p является равенство

$$1 - \sum_2^N n a_n = 0.$$

При помощи этого признака весьма просто устанавливается ряд свойств функций $f_p(z)$, принадлежащих классу S_p:

1. $a_n \leqslant 1/n$, $n = 2, 3, \ldots, N$, причем знак равенства достигается для функции $f_p(z) = z - z^n/n$.

2. $f_p(z)$ не может отображать круг $|z| < 1$ на выпуклую область, но отображает его на область, звездообразную относительно начала координат.

3. Отображение круга $|z| < 1$, реализуемое функцией $w = f_p(z)$, покрывает круг $|w| \leqslant 1/2$, и для площади A отображения имеет место оценка $\pi < A \leqslant 3\pi/2$, где знак равенства достигается для функции $f_p(z) = z - z^2/2$.

4. Круг $|z| \leqslant 1/2$ отображается каждой функцией $f_p(z)$ на выпуклую область, покрывающую круг $|w| \leqslant 3/8$; для функции $f_p(z) = z - z^2/2$ эти оценки не могут быть улучшены.

5. $d_0/d^* \geqslant 2/3$, где d_0 и d^* — радиусы кругов, покрываемых соответственно образом круга $|z| \leqslant r_0$ (r_0 — радиус выпуклости функции $f_p(z)$) и образом единичного круга.

6. Имеют место «теоремы искажения»:

$$|z| - |z|^2/2 \leqslant |f_p(z)| \leqslant |z| + |z|^2/2,$$
$$1 - |z| \leqslant |f_p'(z)| \leqslant 1 + |z|.$$

Г. В. Корицкий

1163. Отрезки однолистных функций. Г у и Ш э н (單葉函數的開始多項式。龍昇), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, **4**, № 1, 105—112 (кит.; резюме англ.)

Пусть $f_k(z) = z + \sum_{n=1}^\infty a_n^{(k)} z^{nk+1}$ — функция регулярная и однолистная в единичном круге и $\sigma_n^{(k)}(z) = z + \sum_{\nu=1}^n a_\nu^{(k)} z^{k\nu+1}$. Доказывается, что $\sigma_n^{(3)}(z)$ однолистны в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, причем число $\sqrt[3]{3}/2$ нельзя заменить большим. Этот результат объединяется с ранее известными результатами Сегё, Илиева и

автора в одну теорему: при $k=1, 2, 3$ функции $\sigma_n^{(k)}(z)$ однолистны в круге $|z|<\sqrt[k]{k/2(k+1)}$; последнее число нельзя заменить большим.

Доказано также, что если $F(\zeta)=\zeta+\sum_1^\infty \alpha_\nu \zeta^{-n}$ регулярна и однолистна в области $1<|\zeta|<\infty$, то $\varphi_n(\zeta)=\zeta+\sum_1^{n-1}\alpha_\nu\zeta^{-\nu}$ при $n>12$ однолистны в области $(1-5n^{-1}\ln n)^{-1/2}\leqslant|\zeta|<\infty$ и при всех n однолистны в области $^3/_2\leqslant|\zeta|<\infty$. *Г. В. Корицкий*

1164. Об одной экстремальной граничной задаче. Шеффер (An extremal boundary value problem. Schaeffer A. C.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 41—47 (англ.)

Доказывается, что для всякого заданного замкнутого множества E точек окружности $|z|=1$ положительной меры существуют совершенное подмножество той же меры и регулярная, однолистная в круге $|z|<1$ функция $w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$, отображающая круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$ с радиальными разрезами так, что названное совершенное подмножество отображается на окружность $|w|=1$, а его дополнение — на радиальные разрезы.

Устанавливается, что для функции, обладающей указанным свойством, модуль $|a_1|$ достигает минимума в классе S_E регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ функций, удовлетворяющих условию $f(0)=0$ и таких, что $\lim\limits_{r\to1}|f(re^{i\varphi})|\geqslant1$ почти всюду на заданном замкнутом множестве E. При доказательстве используется одна вариационная формула, установленная ранее автором совместно со Спенсером (Schaeffer A. C., Spencer D. C., Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Colloq., 1950, v. 35). *Г. В. Корицкий*

1165. Об одном семействе аналитических экстремальных функций. Лея (Sur une famille de fonctions analytiques extrémales. Leja F.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 1—6 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Вводятся следующие обозначения: D — конечная ν-связная область, ограниченная $\nu+1$ континуумами $C_0, \ldots, C_\nu$, причем C_k $(k=0, \ldots, \nu)$ является общей границей областей D_k и Δ_k $(\infty\in\Delta_k)$ и $D\subset D_0$; $A(z)>0$ — функция непрерывная на $F=\bigcup_0^n C_k$; $p(z)=\prod_1^\nu(z-a_k)^{\sigma_k}$, где $a_k\in D_k$ и σ_k — рациональные числа, $\sigma_k>0$, $\sum_1^\nu\sigma_k<1$; $\zeta^{(n)}=\{\zeta_0, \ldots, \zeta_n\}$ — система точек, принадлежащих F;

$$L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})=\prod_{j\neq k=0}^{n}\frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\quad(j=0, \ldots, n);$$

$$\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})=L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})\,[p(\zeta_j)/p(z)]^n A(\zeta_j)^{n\lambda}\quad(j=0, \ldots, n);$$

$$V(\zeta^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|;\quad U(\lambda, \zeta^{(n)})=V(\zeta^{(n)})\prod_{k=0}^{n}[|p(\zeta_k)|^{-n}A(\zeta_k)^{-n\lambda}]$$

(λ — действительный параметр). Система точек, для которой достигается $\max U(\lambda, \zeta^{(n)})=U_n(\lambda, F)$, $\zeta^{(n)}\in F$ обозначается через $x^{(n)}=x^{(n,\lambda)}=\{x_0^{(n,\lambda)}, \ldots, x_n^{(n,\lambda)}\}$.

Теорема 1. Для любого λ и $z\neq a_k$ $(k=1, \ldots, \nu)$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})|}=\Phi(z, \lambda),\qquad 0<\Phi(z, \lambda)<\infty.$$

Пусть

$$I^{(j)}(x^{(n)})=\left[\prod_{j\neq k=0}^{n}(x_j-x_k)\right]p(x_j)^{-n}A(x_j)^{-n\lambda},$$

точки $x_0, \ldots, x_n$ нумеруются так, что

$$|I^{(0)}(x^{(n)})|\leqslant|I^{(j)}(x^{(n)})|,\quad j=1, \ldots, n.$$

Теорема 2. Существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z, \lambda, x^{(n)})|}=\Phi(z, \lambda),$$

если $z\notin E_\lambda$, где E_λ состоит из всех точек систем $x^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ и точек a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. При этом сходимость равномерна в любой конечной части плоскости, находящейся на положительном расстоянии от множества E_λ, и $\ln\Phi(z, \lambda)$ — гармоническая функция всюду, кроме этого множества.

Пусть G — какая-нибудь из областей D, $D_1-(a_1)$, $\ldots$, $D_\nu-(a_\nu)$, Δ_0, α — фиксированная (произвольная) точка области G и

$$\varphi_n(z, \lambda)=e^{i\theta_n}\sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z, \lambda, x^{(n)})}\quad(n=1, 2, \ldots),$$

где числа θ_n и ветвь радикала подобраны так, что $\varphi_n(\alpha, \lambda)>0$.

Теорема 3. Функции $\varphi_n(z, \lambda)$ сходятся в каждой односвязной области G', содержащейся в G и содержащей α. Функция $\varphi(z, \lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z, \lambda)$ регулярна в G', продолжима аналитически во все точки G и $|\varphi(z, \lambda)|=\Phi(z, \lambda)$ вне F.

$\varphi(z, \lambda)$ в каждой из областей G определяет семейство однозначных или многозначных функций, зависящих от параметра λ, границы F, $A(z)$ и $p(z)$. Эти функции автор называет экстремальными функциями, ассоциированными с F, $A(z)$, $p(z)$.

Теорема 4. Для данного λ $\Phi(z, \lambda)$ непрерывна в целой плоскости, из которой исключены точки $a_1, \ldots, a_\nu$, и стремится к $+\infty$, когда z стремится к одной из точек $a_1, \ldots, a_\nu, \infty$.

Пусть $w = g(z, D_k)$ $(k = 1, \ldots, \nu)$ — функция, отображающая конформно D_k на круг $|w| < 1$, так что $g(a_k, D_k) = 0$. Соответственно $g(z, \Delta_0)$ означает функцию, отображающую Δ_0 на единичный круг, причем $g(\infty, \Delta_0) = 0$.

Теорема 5. В области D $\varphi(z, 0)$ равна константе модуля 1. Вне D:

$$\varphi(z, 0) = e^{i\theta}[g(z, D_k)]^{-\sigma_k} \text{ в } D_k \ (k = 1, \ldots, \nu)$$

и

$$\varphi(z, 0) = e^{i\theta}[g(z, \Delta_0)]^{\sigma-1} \text{ в } \Delta_0.$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_\nu$ и θ — действительная константа.

Пусть

$$m = \inf_{z \in F} A(z), \quad M = \sup_{z \in F} A(z).$$

Теорема 6. Если $\lambda > 0$, то имеет место неравенство (во всей плоскости)

$$\log \Phi(z, 0) + \lambda \log m \leqslant \log \Phi(z, \lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \log \Phi(z, 0) + \lambda \log M.$$

Если же $\lambda < 0$, то в неравенстве нужно поменять местами m и M. *С. Я. Хавинсон*

1166. О некоторых экстремальных проблемах для аналитических функций. Рогозинский, Шапиро (On certain extremum problems for analytic functions. Rogosinski W. W., Shapiro H. S.), Acta math., 1953, 90, № 3—4, 287—318 (англ.)

Пусть H_p — класс аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\psi})|^p d\theta \leqslant M,$$

а H_p^1 — тот его подкласс, для которого $M = 1$. Доказывается, что при заданной на окружности $|x| = 1$ функции $K(x)$ имеем:

$$\sup_{f \in H_p^1} \left| \int_{|x|=1} f(x) K(x) dx \right| =$$
$$= \inf_{\varphi \in H_q} \left\{ \int_{|x|=1} |K(x) - \varphi(x)| \, |dx| \right\}^{1/q} \qquad (1)$$

$(1 \leqslant p \leqslant \infty, \ 1/p + 1/q = 1)$. В случае $p = 1$ в правой части стоит $\inf_{\varphi \in H_q} \max |K(x) - \varphi(x)|$. Исследуются вопросы существования и единственности экстремальных функций в обеих частях равенства (1). Доказанные результаты, равно как и метод доказательства, основанный на применении теоремы Хана — Банаха — Сухомлинова, не новы и были ранее опубликованы референтом (Успехи матем. наук, 1949, 4, 158—159; Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 148, Математика 4, 133—143). В заметке референта (РЖМат, 1953, 193) получены более общие результаты. В реферируемой статье ссылки на упомянутые работы отсутствуют. *С. Я. Хавинсон*

1167. К вопросу о конформных отображениях близких областей с неподвижными точками на границе в теории фильтрации. Шаманский (До питання про конформні відображення близьких областей з нерухомими точками на границі в теорії фільтрації. Шаманський В. Э.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 3, 158—162 (укр.)

Дается выделение главных частей функций, конформно отображающих при трех неподвижных точках на границе круг, полуплоскость и полуполосу на близкие области, ограниченные контурами с непрерывной кривизной. Исследуется характер изменения вектора скорости при вариации границы области движения в случае фильтрации под плотиной при бесконечной глубине водоупора. Делаются выводы о поведении вектора скорости фильтрации при установке шпунта и при углублении водоема. Для случая граничных точек области движения указанные выводы о поведении вектора скорости фильтрации могут быть получены из теоремы референта о движении граничных точек и приведены в книге П. Я. Полубариновой-Кочиной (Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, М. 1952, 138—143). В случае одной и двух неподвижных точек на границе выделение главных частей функций, дающих отображение указанных выше близких областей, было получено М. А. Лаврентьевым (Матем. сб., 1938, 4, № 3, 391—458). *Г. Н. Положий*

1168. Кручение цилиндрических стержней. Батырев А. В., Уч. зап. Ростовск.-на-Дону ун-та, 1953, 18, № 3, 3—16

Методами теории функций комплексного переменного сначала показывается, что если контур C сечения цилиндрического стержня есть аналитическая кривая и функция

$$z(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{t^k}$$

отображает конформно область, внешнюю к контуру C, на область, внешнюю кругу конформного радиуса R, то компоненты напряжения, а также жесткость при кручении определяются формулами:

$$X_z - iY_z = i\mu K R e^{i\varphi} \widetilde{z}^r \ (Re^{i\varphi}),$$
$$\mathcal{K} = \frac{i\mu}{4} \int_{t-K} z^r \, [\widetilde{z} + 2Kt\widetilde{z}^r] \, \widetilde{z}\widetilde{z} \, dt,$$

где

$$K = (2S) \Big/ \left(R^2 \int_0^{2\pi} |z' \ (Re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \right)$$

— постоянная (S — площадь сечения), и

$$\widetilde{z}(t) = \frac{R^2}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{R^{2k}} t^k.$$

Полученные формулы применяются, когда сечение — круг, эллипс или обобщенная лемниската.

Если контур сечения не является аналитической кривой, рекомендуется взять сечение немного большего конформного радиуса и найти для него все интересующие величины. Приведены также отображающие функции для профилей, близких прокатным железа. *А. К. Рухадзе*

1169. Об одномерном течении вязкой жидкости. Батырев А. В., Уч. зап. Ростовск.-на-Дону ун-та, 1953, 18, № 3, 17—19

Новый метод решения задачи об установившемся одномерном течении вязкой несжимаемой жидкости вдоль прямолинейной трубы постоянного поперечного сечения при отсутствии массовых сил. Решение этой задачи сводится к нахождению функции комплексного переменного $W(z)$ внутри контура поперечного сечения трубы при заданной на границе действительной части $W(z)$. Вместо обычного отображения сечения на внутренность круга отображается область, внешняя к сечению, на область, внешнюю к кругу, а затем после аналитического продолжения отображающей функции $z(u)$ на кольцо внутри круга строится в этом кольце функция $W[z(u)]$, удовлетворяющая граничному условию. Вопрос о том, будет ли полученная функция решением задачи, связан с тем — можно ли ее аналитически продолжить так чтобы она была однозначной во всей внутренности круга. Этот вопрос автор не исследует. В отмеченных автором частных примерах трубы кругового и эллиптического сечений аналитическое продолжение осуществляется легко. *М. И. Гуревич*

1170. Дополнения к «Заметке о приближенных решениях проблемы струйного обтекания». Кравченко (Additions à la «Note sur les solutions approchées du problème des sillages». Kravtchenko Julien), Ann. Inst. Fourier, 1952, 4, 141—143 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Проводится сопоставление аппроксимационной формулы, положенной референтом в основу разработанного им приближенного метода решения задачи (Укр. матем. ж., 1950, 2, № 1, 107—117), с некоторыми формулами Леви-Чивита. Автор приводит также замечание Армстронга, указавшего, что метод референта лишь обозначениями отличается от метода Бродецкого (Brodetsky, Proc. Roy. Soc., 1922, A102, 542—553).

Примечание референта. Бродецкий не показал, что найденные им решения действительно удовлетворяют условиям задачи; кроме того, он лишь отметил возможность построения обтекаемого контура по заданным значениям параметров, входящих в решение, не касаясь вопроса о вычислении этих параметров для заданного контура. Бродецким также не рассматривался случай неизвестного положения точек срыва струй, занимающий центральное место в указанной выше статье референта. *И. М. Рапопорт*

1171. О решении некоторых задач напорной фильтрации. Нужин М. Т., Инженерный сб., 1954, 18, 49—60

Рассматривается задача о фильтрационном расчете гидротехнического сооружения, контур которого состоит из нескольких непроницаемых участков. Такого рода задачи встречаются при расчете дренированных флютбетов, котлованов, шлюзов и т. п.

Путем конформного отображения заданной области фильтрации z на полуплоскость t задача приводится к частному случаю смешанной краевой задачи для полуплоскости, когда на одних участках вещественной оси заданы постоянные значения потенциала, а на других постоянные значения принимает функция тока.

Применение этого метода для случая сплошного флютбета было предложено М. А. Лаврентьевым (Конформные отображения с приложением к некоторым вопросам механики, Гостехиздат, М.—Л., 1946).

Устанавливается единственность решения задачи и приводится ее общее решение в виде несобственного интеграла, зависящего от $n+1$ параметра (n — число проницаемых участков в теле гидротехнического сооружения), которые определяются из системы $n+1$ линейно независимых трансцендентных уравнений.

Далее, пользуясь выводом формулы Келдыша — Седова, автор устанавливает предельные значения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ для границы области фильтрации, что и представляет наибольший практический интерес.

Рассмотрены четыре следующих плоских флютбета: с одним проницаемым участком при бесконечной глубине T водопроницаемого грунта, с одним проницаемым участком при $T<\infty$, с двумя симметрично расположенными проницаемыми участками при $T=\infty$, с проницаемым участком в форме окружности при $T=\infty$.

Ввиду сложности вычислений автор ограничивается в данных примерах только определением расходов.

Во втором примере результаты вычислений сопоставляются с опытными данными, полученными А. В. Романовым (Фильтрация в основании плотин при наличии дренажей. В сб.: Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений, Гос. изд-во лит-ры по строит-ву и архитектуре, 1952). Совпадение получено вполне удовлетворительное.

Библиография, 9 названий. *П. Ф. Фильчаков*

1172. О свойствах бесконечных систем уравнений в задачах кручения некоторых двухсвязных профилей. Шерман Д. И., Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 4, 470—476

В § 1 изучается задача о кручении круглого бруса, симметрично ослабленного эллиптическим отверстием. Полый цилиндр поперечного сечения S, ограниченный извне окружностью L_1, а изнутри эллипсом L_2 с тем же центром, что у окружности, скручивается некоторым моментом M. За плоскость $z=x+iy$ принято сечение бруса и начало координат — в центре сечения S. Задача сводится к определению функции $\varphi(z)$, голоморфной в области S, по граничным условиям

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=0 \text{ на } L_1,$$

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=t\bar{t}+C \text{ на } L_2,$$

где t — аффикс точки контура, C — подлежащая определению постоянная.

Методом, использованным автором в прежних работах (например, Прикл. матем. и механика, 1951, 15, № 1, 75—82), задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений; далее дается исследование этой системы. Связанные с последним вопросом трудности преодолеваются путем замены суммы коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений системы некоторым интегральным выражением, зависящим от вспомогательного параметра, введенного вместо искомых неизвестных.

Изучение этого интеграла позволяет установить, что полученная система линейных уравнений вполне

регулярна. Численные расчеты, приведенные для конкретного примера, указывают на достаточную эффективность приема автора даже в случаях, наименее благоприятных в смысле связанных с ними вычислительных трудностей.

В § 2 несколько иным, более прямым, путем изучается система бесконечных уравнений, полученная в задаче кручения круглого бруса с двумя продольными круговыми полостями (Степанов Р. Д., Шерман Д. И., Инженерный сб., 1952, **11**, 127—150).

А. И. Каландия

1173. Об одной граничной задаче для гармонических функций. Лопатинский Я. Б., Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, **22**, № 5, 5—11

Пусть V — выпуклая трехмерная область, граница S которой является дважды непрерывно дифференцируемым многообразием. Пусть далее $\alpha(y)$ $(y \in S)$ — непрерывно дифференцируемая на S функция, $\alpha(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция и $\nu(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к S. В предположении, что $\alpha \cdot \nu > 0$, $a < 0$ и $a + \nu \cdot \mathrm{rot}\,(\alpha \times \nu) < 0$, методом интегральных уравнений доказывается существование и единственность гармонической в V, непрерывной на $V \cup S$ функции $u = u(x)$, удовлетворяющей на S условию $\alpha \cdot \mathrm{grad}\, u + au = f$, где $f = f(y)$ — заданная на S непрерывная функция, а $\mathrm{grad}\, u(y) = \lim\limits_{0 \leqslant \tau \to 0} \mathrm{grad}\, u(y + \tau\nu(y))$, причем сходимость предполагается равномерной относительно $y \in S$.

В работе встречаются опечатки.

М. Б. Гагуа

1174. Отдельные случаи обратных краевых задач. Нужин М. Т., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 3—8

Рассматриваются частные случаи задачи:

Задана функция $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$. Найти односвязную область G такую, чтобы $f(s)$ — как функция от дуговой абсциссы s границы Γ — была граничным значением аналитической в области функции $w(z)$ с заданными там особенностями.

Основные случаи задачи (G конечна, $w(z)$ регулярна; G содержит точку $z = \infty$, в которой $w(z)$ имеет полюс) были рассмотрены автором ранее (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1949, **109**, № 1, 97—120). Был указан метод построения решения, найдены условия замкнутости контура Γ, рассмотрен вопрос о единственности решения.

В реферируемой статье изучаются случаи:

1) Область G содержит бесконечно удаленную точку, $w(z)$ имеет в G полюс первого порядка, на границе Γ функция dw/ds удовлетворяет условию Гёльдера относительно s.

2) $w(z)$ регулярна в области, на границе имеет полюс первого порядка.

3) Граница Γ бесконечна, $w(z)$ регулярна в области или имеет полюс первого порядка.

С. Н. Андрианов

1175. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций. Андрианов С. Н., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 21—30

Обратные краевые задачи ранее исследовались при условии, что логарифм производной функции, отображающей $|\xi| < 1$ на искомую область, представим формулой Шварца (такие области называются областями Смирнова). Называя это решение фундаментальным, автор вводит понятие общего решения, когда предыдущее условие может и не выполняться. Доказывается теорема: Для того чтобы выделить фундаментальное решение, достаточно, чтобы искомая функция $w(z)$ в искомой области g_z была непрерывной вплоть до границы Γ_z вместе со своей производной dw/dz. Обратно, показывается, что если $ds/d\sigma$ удовлетворяет условию Гёльдера и не обращается в нуль, то в фундаментальной области g_z функция $w(z)$ будет иметь производную, непрерывную вплоть до границы.

Пусть на отрезке $0 \leqslant s \leqslant l$ задана комплексная функция $a(s) + ib(s)$ ($a(s) + ib(s)$ абсолютно непрерывна и периодична); функция $\ln|ds/d\sigma|$ суммируема по параметру $\sigma = \int_0^s |dw/ds|\,ds$; $s(\sigma)$ абсолютно непрерывна; кривая Γ_w, определенная соотношением $w = a(s) + ib(s)$, имеет непрерывно вращающуюся касательную,

$$|w'(\sigma + h) - w'(\sigma)| \leqslant Mh^{\alpha},$$

где

$$M \text{ и } \underset{\sim}{\alpha}\ (0 < \alpha \leqslant 1)$$

не зависят от σ. Найти конечную область g_z класса C^* (через C^* обозначается класс областей Смирнова с включением неоднолистных областей) и голоморфную в области g_z, непрерывную до границы Γ_z функцию $w(z)$ такую, чтобы на границе Γ_z $w[z(s)] = a(s) + ib(s)$, где s — дуговая абсцисса точки контура Γ_z. Предполагая, что многолистная область g_w, ограниченная Γ_w, задана (т. е. кроме ориентированной кривой Γ_w задано также положение точек ветвления w_k вместе с определенной связью листов), автор обычным путем строит решение задачи и обобщает на этот случай теорему о единственности решения, доказанную ранее для однолистной области g_w.

В общем случае доказывается, что если

$$\mathrm{ind}\,\Gamma_w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_w} d\ln\frac{dw}{d\sigma} = n \geqslant 1,$$

то фундаментальное решение существенно зависит от $n-1$ комплексных постоянных w_k.

Автор указывает на ряд возникающих вопросов, например, можно ли среди областей, составляющих общее решение, найти область однолистную, если фундаментальное решение неоднолистно?

М. Т. Нужин

1176. О существовании в области, ограниченной кривой Жордана, функции, голоморфной внутри области и сходящейся к заданным значениям на ее границе. Дзин (Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati. Zin Giovanni), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 4, 476—483 (итал.)

Статья примыкает к предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 2089).

Пусть C — замкнутая, спрямляемая, простая кривая Жордана и D — ее внутренняя область.

Если $\varphi(z)$ задана на C, является там функцией ограниченной вариации и $\int_C \varphi(z) z^n dz = 0$, $n = 0,1,\ldots$, то в каждой точке $z \in C$ имеем: $\varphi(z^+) = \varphi(z^-)$ ($\varphi(z^+)$, $\varphi(z^-)$ означают пределы функции $\varphi(t)$ при стремлении точки $t \in C$ к z в положительном и отрицательном направлении соответственно). Следствия этого факта: 1) функция: $f(z) = (2\pi i)^{-1} \times \int_C \varphi(t)(t-z)^{-1} dt$, если $z \in D$, и $f(z) = \varphi(z^+) = \varphi(z^-)$, если $z \in C$, непрерывна в $D + C$; 2) для любой функции $\Phi(z)$, аналитической в D, непрерывной в $D + C$ и абсолютно непрерывной на C:

$$\int_C \varphi(z)\, \Phi'(z)\, dz = 0.$$

В теоремах братьев Рисс, И. И. Привалова и других, посвященных аналогичным вопросам, предполагается непрерывность $\varphi(z)$ на C. В книге И. И. Привалова «Граничные свойства аналитических функций» (М.—Л., 1950), где изложены эти результаты, также предполагается непрерывность, хотя она явно и не оговорена (*Прим. реф.*)

С. Я. Хавинсон

1177. Заметка о степенных рядах. Раджагопал (A note on power series. Rajagopal C. T.), Math. Student, 1952, **20**, 99—106 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Основные результаты этой заметки аналогичны известным теоремам Рогозинского, Стеффенсена, Бора и Ландау о функциях $f(z) = \sum a_n z^n$, регулярных и ограниченных в единичном круге (Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Springer, Berlin, 1929, стр. 9, 10, 26). Вместо предположения об ограниченности $f(z)$ при $|z| < 1$, примем, что верхней гранью для действительной части $f(z)$ при $|z| < 1$ является 1. Автор показывает, что тогда:

1) $\operatorname{Re} s_n(z) \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1/2$ для $n = 0,1,\ldots$, где $s_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$;

2) $\operatorname{Re} \sigma_n(z) \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$, где $\sigma_n(z) = (n+1)^{-1} \sum_0^n s_k(z)$;

3) если, кроме того, $a_0 \geqslant 0$, то тогда $M(1/3) \leqslant 1$ и $M(r) \leqslant 2/(1-r)$, где $M(r) = \sum |a_n| r^n$.

Пример $f(z) = 2z/(1+z)$ показывает, что постоянные $1/2$ и $1/3$ в 1) и 3) не могут быть увеличены и что коэффициент 2 в 3) нельзя заменить на меньшую константу.

Усиливая свои предположения о $f(z)$ требованием, чтобы $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$, автор получает (для $|z| < 1$) оценку

$$|\operatorname{Re} s_n(z)| \leqslant L_n \sim 4\pi^{-2} \log n;$$

и для каждого n он строит функцию $f(z)$, для которой $s_n(1) = L_n$.

G. Piranian

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 113.

1178. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций. Джрбашян М. М., Матем. сб., 1953, **33** (75), № 3, 485—530

Для целых функций конечного порядка $\rho \geqslant 1/2$ устанавливается ряд теорем об интегральном представлении, во многом аналогичных теореме Пейли—Винера. Например:

Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1/2 \leqslant \rho < 1$) и типа σ ($0 < \sigma < \infty$), удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty |f(te^{\pm i\pi/(2\rho)})|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1} dt < \infty \quad (\mu > 1/2),$$

то имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zv;\ \mu)\, \psi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv,$$

где

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}, \quad \int_0^{\sigma^{1/\rho}} |\psi(v)|^2 v^{\rho-1} dv < \infty$$

С помощью таких интегральных представлений устанавливаются различные теоремы единственности для целых функций конечного порядка. Например:

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($1/2 \leqslant \leqslant \rho < 1$) и нормального типа. Если $|f(te^{i\theta_1})| < At^\gamma$, $|f(te^{i\theta_2})| < At^\gamma$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/\rho$, $0 \leqslant \gamma < 1$, и $f^{(\lambda_n)}(0) = 0$, то для тождества $f(z) \equiv \text{const}$ необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_1^\infty \lambda_n^{-1}$ расходился.

М. А. Евграфов

1179. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Джрбашян М. М., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 6, 1133—1136

Рассматривается интегральное преобразование вида

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\exp(\pm ixy) - 1}{\pm iy}\, g(y)\, y^{\mu-1} dy,$$

где $g(y)\, y^{\mu-1} \in L_2(0,+\infty)$, $\rho \geqslant 1/2$, $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$, и формулируются две теоремы, обобщающие предложение Планшереля в теории интеграла Фурье.

Отмечается, что рассмотрение указанного преобразования позволяет установить ряд теорем типа теоремы Винера и Пейли, дающих интегральное представление некоторых классов целых функций конечного порядка и нормального типа. Так, например, класс целых функций $f(z)$ порядка ρ ($1/2 \leqslant \rho < 1$) и данного типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(t \exp\{\pm i\pi/(2\rho)\})|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1} dt < +\infty,$$

совпадает с классом функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(vz;\mu)\, \psi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv$$

(см. реф. 1178).

А. Ф. Тиман

1180. Об одном простом типе подгрупп модулярной группы. Петерсон (Über einen einfachen Typus von Untergruppen der Modulgruppe. Petersson Hans), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 308—315 (нем.)

Пусть Γ — модулярная группа, а Γ' — некоторая подгруппа Γ. Обозначим через p род поля автоморфных относительно Γ' функций, через σ число неэквивалентных параболических неподвижных точек, через e_2 (e_3) число неэквивалентных эллиптических точек порядка 2 (соответственно 3), через μ индекс группы Γ' в группе Γ.

Как известно, имеет место соотношение

$$\mu = 12(p-1) + 6\sigma + 3e_2 + 4e_3. \qquad (1)$$

Автор называет Γ' циклоидной подгруппой, если $\sigma = 1$. Для циклоидных подгрупп рода нуль соотношение (1) принимает вид

$$\mu + 6 = 3e_2 + 4e_3. \qquad (2)$$

Доказывается, что всякому решению (2) соответствует циклоидная подгруппа рода нуль. Этот результат, как указано в статье, принадлежит Роде (W. Rohde). Отмечается, что из этого результата вытекает существование неизоморфных подгрупп модулярной группы, фундаментальная область которых выходит на границу только в одной точке. Далее дается конструкция циклоидных подгрупп модулярной группы, для которых $e_2 = e_3 = 0$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

1181. Исследование вырожденных мероморфных отображений. Тимм (Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildungen. Thimm Walter), Math. Ann., 1954, 127, № 2, 150—161 (нем.)

Реферируемая статья является продолжением ранее опубликованных работ автора (Math. Ann., 1952, 125, 145—164; РЖМат, 1953, 706; 1954, 5552), именуемых им соответственно Т 1, Т 3, Т 2.

Называя мероморфное отображение нормальным (Normalfall), если оно обладает свойствами, при которых доказана основная теорема работы Т 2, автор устанавливает условия существования такого отображения и связь нормального отображения с множеством точек, служащих образами точки неопределенности мероморфного отображения. Оказывается, что отображение будет нормальным тогда и только тогда, если множество точек, служащих образами точки неопределенности мероморфного отображения $A_k(\Delta_m)$, есть все пространство $(z)_k$. Применением результатов работ Т 1 и Т 3 дается новое доказательство основной теоремы работы Т 2, которая дальше обобщается на случай обобщенного нормального отображения (verallgemeinerten Normalfall).

Пусть $A_k(\Delta_m)$ — мероморфное отображение аналитического многообразия Δ_m. Отображающие функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$ удовлетворяют на Δ_m алгебраическим уравнениям

$$G_\lambda(z)_k = 0, \ \lambda = 1, 2, \ldots, \Lambda,$$

которые определяют неприводимое алгебраическое многообразие S. Если множество точек, служащих образами точки неопределенности O отображения $A_k(\Delta_m)$ совпадает с S, то отображение $A_k(\Delta_m)$ называется обобщенным нормальным отображением.

Так же, как и для нормального отображения из аналитической зависимости функций, осуществляющих обобщенное нормальное отображение, вытекает их алгебраическая зависимость.

Точка (ζ) пространства $(z)_k$, служащая образом точки неопределенности O при отображении $A_k(\Delta_m)$, называется «постоянно» достижимой, если существует аналитическая кривая γ, проходящая через точку O и обладающая следующими свойствами: а) γ принадлежит Δ_m, б) γ не содержит точек неопределенности отображения A_k, в) на γ $z_j = \zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Оказывается, что при обобщенном нормальном отображении каждая точка, служащая образом точки неопределенности отображения $A_k(\Delta_m)$, есть «постоянно» достижимая точка или предельная точка «постоянно» достижимых образов точки неопределенности.

Изучается структура множества «постоянно» достижимых точек и приводится ряд примеров.

А. В. Лебедев

1182. К теории ортонормальных систем. Мешковский (Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. Meschkowski Herbert), Math. Ann., 1954, 127, № 2, 107—129 (нем.)

Пусть D — n-связная однолистная, ограниченная аналитическими кривыми C_ν ($C = \bigcup_1^n C_\nu$), область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Если Ω — класс функций, регулярных и однозначных в D вместе с их интегралами и имеющих конечный интеграл Дирихле, то, как известно, всякую функцию $f_0(z) \in \Omega$ можно представить в виде ряда

$$f_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(z),$$

где $c_\nu = (f_0, \varphi_\nu) = \iint_D f_0 \overline{\varphi_\nu} dxdy$, а $\{\varphi_\nu(z)\}$ — полная ортонормальная система функций класса Ω для области D.

Если функции $f_0(z)$ и $\varphi_\nu(z)$ будут регулярны и на C, то коэффициенты Фурье c_ν можно определить и так:

$$c_\nu = \frac{1}{2i}\int_C f_0 \overline{\Phi_\nu(z)} dz, \ \Phi_\nu(z) = \int^z \varphi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Автор устанавливает аналогичное представление для функции $F(z)$, имеющей в области D полюсы, предполагая ее регулярной на границе C. При этом вводится требование, чтобы коэффициенты c_ν при функциях $\varphi_\nu(z)$ вычислялись по прежним формулам.

Решение задачи сводится к нахождению функции $\gamma(z)$, обладающей теми же особенностями, что и $F(z)$, и удовлетворяющей условию ортогональности

$$(\gamma(z), \varphi_\nu) = \frac{1}{2i}\int_C \gamma(z)\overline{\Phi_\nu(z)}\, dz = 0. \qquad (1)$$

Тогда функция $F(z)-\gamma(z)$ будет класса Ω и для $F(z)$ справедливо представление

$$F(z)=\gamma(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(z),\ a_\nu=(F,\varphi_\nu).$$

Найденные автором примеры функций, удовлетворяющих условию (1), обладают интересными отображающими свойствами.

Так, например, для функции $f_1(z)$, имеющей в области простой полюс $z=u$ с вычетом, равным r, функция

$$\gamma(z)=rE'(z,u)/E(z,u),$$

где $E(z,u)=(z-u)+a_2(z-u)^2+\ldots$, отображает область D на круг единичного радиуса с центром в начале координат и с $n-1$ разрезами вдоль дуг концентрических окружностей.

Соответствующая задача решается для представления функции $F(z)$ через функции системы, ортонормальной на контуре области:

$$[\chi_\nu(z),\chi_\mu(z)]=\int_C\chi_\nu(z)\overline{\chi_\mu(z)}ds=\delta_{\nu\mu}=\begin{cases}1 \text{ для } \nu=\mu,\\ 0 \text{ для } \nu\neq\mu.\end{cases}$$

Основной результат формулируется в следующей теореме:

Пусть $F(z)$ регулярна и однозначна в $D\cup C$, за исключением полюсов $z=u_\rho$ $(\rho=1,2,\ldots,r)$, где она имеет мероморфные части

$$\frac{a_{n-1}^{(\rho)}}{(z-u_\rho)^{n+1}}+\ldots+\frac{a_1^{(\rho)}}{z-u_\rho},$$

и пусть интеграл ее после вычета мероморфных частей также однозначен.

Тогда $F(z)$ может быть представлена через функции системы $\{\varphi_\nu(z)\}$:

$$F(z)=-\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_{\nu-1}^{(\rho)}}{\nu!}N'_\nu(z,u_\rho)+\sum_{\mu=1}^{\infty}(F,\varphi_\mu)\varphi_\mu(z)$$

или через функции системы $\{\chi_\nu(z)\}$:

$$F(z)=2\pi\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_{\nu+1}^{(\rho)}}{\nu!}L_{\nu+1}(z,u_\rho)+\sum_{\mu=1}^{\infty}[F,\overline{\chi}_\mu]\chi_\mu(z).$$

Здесь

$$N'_n(z,u)=\partial^{n-1}N'(z,u)/\partial u^{n-1},\ ('=\partial/\partial z),$$

$N(z,u)=[A(z,u)+B(z,u)]/2$, где $A(z,u)$ и $B(z,u)$— функции, отображающие область D на однолистную область, граница которой состоит из разрезов, параллельных соответственно вещественной и мнимой осям, так, что точка $z=u$ переходит в ∞.

$$L_\nu(z,u)=\partial^{\nu-1}L_1(z,u)/\partial u^{\nu-1},$$

где

$$L_1(z,u)=[2\pi(z-u)]^{-1}+\alpha_1(z-u)+\ldots$$

Функции $N_n(z,u)$ (интеграл от $N'_n(z,u)$) и $L_\nu(z,u)$ среди функций регулярных в $D\cup C$, за исключением полюса $z=u$, обладают наименьшими нормами соответственно

$$(N'_n,N'_n)=\iint_D N'_n\overline{N}'_n dxdy \text{ и } [L_\nu,L_\nu]=\int_C L_\nu\overline{L}_\nu ds.$$

Далее наглядно строятся с помощью введенных автором функций полные ортонормальные системы и, в частности, ортонормальная система, полная для класса функций, регулярных и однозначных вместе с их интегралами в $D\cup C$. *А. В. Лебедев*

1183. Естественные границы аналитических функций комплексных переменных. Фукс (Natural boundaries of analytic functions of complex variables. Fuks B. A.), Amer. Math. Soc. Translation № 93, 1953, 59 pp. (англ.)

Переведено из журнала «Успехи матем. наук», 1950, **5**, № 4(38), 75—120.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 116.

1184 РЖ. Конформное отображение. Бибербах (Conformal mapping. Bieberbach L., VI + 234 pp., 42 figs, Chelsea Publ. Co., New York, 1953, 2.25 doll.) [**Рецензия: Бейли** (Bailey W. N.), Sci. Progr., 1954, **42**, № 165, 123—124 (англ.)]

См. также: 1127, 1222, 1245, 1248, 1295, 1301, 1305, 1377, 1378, 1506, 1507

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1185. Разложения в степенные ряды. Йейтс (Developments in power series. Yates R. C.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 256—258 (англ.)

При разложении в степенные ряды Тейлора функций, заданных дифференциальными уравнениями, рекомендуется пользоваться методом последовательного дифференцирования как более экономичным, — взамен подстановки ряда с неопределенными коэффициентами. Примеры:

$$y=\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg}x,\ \sec x;\ y'=x+y^2.$$

В. Л. Гончаров

1186. Решение нелинейных дифференциальных уравнений реверсионным методом. Кон, Зальтцберг (Solution of nonlinear diffe-

rential equations by the reversion method. Cohn George I., Saltzberg Bernard), J. Appl. Phys., 1953, 24, № 2, 180—186 (англ.)

Реверсионный метод заключается в сведении некоторых типов нелинейных дифференциальных уравнений к обыкновенным линейным уравнениям. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Z_1 I + Z_2 I^2 + \cdots + Z_n I^n = \lambda V(t),$$

где $I(t)$ — искомая функция, а Z_k — линейные дифференциальные и интегральные операторы. Множитель λ, облегчающий сведения к линейной системе, полагается равным единице после того, как он сыграл свою роль. Решение $I(t)$ ищется в виде суммы $I_1 + I_2 + \ldots + I_m + \ldots$, где каждый член I_m зависит только от предыдущих членов, а I_1 есть решение исходного уравнения с опущенными нелинейными членами. Считая, что при $\lambda \neq 1$ решение представляется в виде $I = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m I_m$ и подставляя это решение в исходное уравнение, из условия равенства коэффициентов при различных степенях λ в левой и правой частях равенства получаем бесконечную систему уравнений, обладающую тем свойством, что уравнение с номером k содержит лишь первое s неизвестных функций $I_1, \ldots, I_s$ и оказывается линейным относительно функции I_k. Эти линейные уравнения отличаются неоднородными членами, каждый из которых вполне определенным образом выражается с помощью операторов Z_k через предыдущие I_k. Выражение для неоднородных членов просты для первых 3-х уравнений. С помощью несложных выкладок авторы получают для вспомогательных уравнений выражения

$$Z_1 I_1 - V(t),\ Z_1 I_m = -\sum_{k=2}^{m} Z_k C_{mk},\ m \geqslant 2,$$

где C_{mk} = коэффициент при λ^m в многочлене $\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda^r I_r\right)^k$. В работе приведены в явном виде формулы для

$$C_{14,k},\ k = 2, \ldots, 14 \text{ и } C_{15,k},\ k = 2, \ldots, 15.$$

В формулах (13) и (14) работы есть опечатки.

Метод иллюстрируется решением нелинейных уравнений $L\frac{dI}{dt} + RI^2 = V$ и $L\frac{dI}{dt} + RI^{1/3} = V$, описывающих силу тока в электрических контурах, содержащих различные нелинейные элементы. Второе из уравнений предварительно приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} x^k = 0.$$

М. Р. Шура-Бура

1187. Об одном приеме интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Кузьмин П. А., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1953, 28, 75—86

В работе приводится метод преобразования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

с постоянными коэффициентами к треугольной форме. Этот метод эффективен, если заранее известны точные значения корней характеристического уравнения. *К. В. Задирака*

1188. Простые операторные уравнения с постоянными коэффициентами. Льюис (Simple operational equations with constant coefficients. Lewis D. C.), Math. Mag., 1954, 27, № 4, 177—188 (англ.)

Получается общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Для этого рассматривается ранг некоторой специальной матрицы. Указывается, что аналогично можно рассматривать уравнения в конечных разностях. Приведены примеры. *В. А. Яблоков*

1189. Заметка об интегрировании уравнений Гамильтона. Бакке, Ольсен, Вергеланд, Эверос (Note on the integration of Hamiltonian equations. Bakke F., Olsen H., Wergeland H., Øveraas H.), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1953, 26, № 13, 51—53 (англ.)

В связи с точкой зрения С. Ли на геометрический характер канонических уравнений Гамильтона, как на процесс развертывания контактных преобразований, вводится оператор

$$U_{dt} = \{1 + dt(H, \ldots)\},$$

где H — характеристическая функция (в скобке Пуассона $(H, \ldots)$ на место точек надо поставить функцию, на которую действует оператор U_{dt}). Вводится целая степень этого оператора и ряд из повторных операторов

$$E \equiv e^{t(H,\ldots)} = 1 + \frac{t}{1!}(H, \ldots) + \frac{t^2}{2!}\Big(H,(H, \ldots)\Big) + \ldots$$

Решения уравнений Гамильтона представляются в виде

$$p(t) = Ep_0,\quad q(t) = Eq_0, \qquad (1)$$

где $p_0(t, p, q) = c_1$, $q_0(t, p, q) = c_2$ — интегралы. Приводится пример использования формул (1) для униформизации алгебраической зависимости

$$A(x, y) = \sum_{m,n=0}^{N} a_{mn} x^m y^n = 0.$$

Эта зависимость рассматривается как интеграл уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial A}{\partial y},\quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial x},$$

в качестве оператора бесконечно малого преобразования принимается оператор $1 + dt\left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Формулы униформизации получаются в виде степенных рядов по t, коэффициенты которых даны в явном виде как функции двух параметров, связанных зависимостью $A(x_0, y_0) = 0$. *И. С. Аржаных*

1190. Заметка о нелинейном дифференциальном уравнении катализа. Мацумото (Note on nonlinear differential equation of catalysis. Matsumoto Toshizô), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A27**, 267—270 (англ.)

Автор показывает, что уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y+1}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=n^2x^2y$$

имеет решение, разложимое в степенной ряд с четными степенями, и указывает метод для вычисления коэффициентов ряда. Из разложения он получает мажорирующую функцию, которая дает нижнюю границу абсциссы сходимости разложения.

E. Pinney

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 129.

1191. По поводу одного результата Н. С. Коплякова. Латышева К. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 3, 207—212

Рассматриваются уравнения

$$L(y)\equiv\sum_{i=0}^{n}(p_i+s_ix)x^{n-1}\frac{dy^{n-i}}{dx^{n-i}}=0. \qquad (1)$$

Пусть $L(x^r)=x^r[f_0(r)+xf_1(r)]$. Имеет место теорема: Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида $y=x^\alpha(a_0+a_1x+\ldots+a_qx^q)$, где α — вещественное число, q — целое неотрицательное, необходимо и достаточно, чтобы среди α_i ($\alpha_i<\alpha_{i+1}$) — совокупности корней уравнения $f_0(\alpha)=0$, отличающихся на целые числа, и среди β_j ($\alpha_j<\beta_{j+1}$) — совокупности корней уравнения $f_1(\beta)=0$, отличающихся на целые числа, имелись такие α_ν, β_λ, для которых $\beta_\lambda-\alpha_\nu=q$ — целое неотрицательное число, причем выполняются неравенства

$$\beta_{\lambda-1}<\alpha_\nu\leqslant\beta_\lambda\leqslant\alpha_{\nu+1}.$$

Эта теорема позволяет установить, что задача о нахождении параметров, при которых обобщенное уравнение Ляме

$$u''+\left(h-k^2n(n+1)sn^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{sn^2x}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu(\mu-1)dn^2x}{cn^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2cn^2x}{dn^2x}\right)u=0$$

допускает решения в виде многочленов, может быть разрешима для более обширного множества значений этих параметров, чем указано в статье референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, № 6, 537—562).

Н. С. Кошляков

1192. Об одном дифференциальном уравнении n-го порядка. Караниколов (Sur une équation différentielle d'ordre n. Karanicoloff Christo), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 3—4, 237—242 (франц.; резюме русс.)

Дается метод нахождения по крайней мере одного решения уравнения

$$\frac{d^nw}{dz^n}=f(z,z^p)w,$$

где p — положительная постоянная, не равная целому числу, $f(z,u)$ — аналитическая функция от z и u в областях

$$G:|z|\leqslant R;\ G_1:|u|\leqslant R_1=R^p\ (u=z^p,\ R>0).$$

Решение имеет вид

$$w=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z)z^{p\nu}$$

и является аналитической функцией в окрестности точки $z=0$, $c_\nu(z)$ определяются последовательно из бесконечной системы уравнений типа Фукса.

Л. И. Донская

1193. Асимптотические и сходящиеся факториальные ряды как решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Эванс (Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations. Evans Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 89—92 (англ.)

Для дифференциального уравнения дробного ранга

$$\sum_{\beta=0}^{n}P_\beta(x)y^{(n-\beta)}=0,$$

$$P_\beta(x)=\sum_{\mu=-m(\beta)}^{\infty}p_{\beta,\mu}x^{-\mu}\quad(p_{\beta,m(\beta)}\neq0,\ \beta=0,1,\ldots,n),$$

показывается возможность получения решений в виде сходящихся рядов из обратных факториалов.

Как видно из статьи, автор не знаком с работами советских ученых в этой области. *К. Я. Латышева*

1194. Об особых точках некоторого дифференциального уравнения первого порядка. II. Като (Sur les points singulieres des équations différentielles ordinaires du premier ordre. II. Katô Tizuko), Natural Sci. Rept Ochnomizu Univ., Tokyo, 1953, **4**, № 1, 36—39 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \qquad (1)$$

где x и y, — вообще говоря, комплексные переменные; $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены относительно y без общих множителей, коэффициенты которых регулярны при $|x|<\Delta$. Полагая

$$P(x,y)=P(0,y)+P_1(x,y),$$
$$Q(x,y)=Q(0,y)+Q_1(x,y),$$

получаем укороченное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\frac{P(0,y)}{Q(0,y)}, \qquad (2)$$

где $t=\ln x$, причем предполагается, что

$$|P(0,y)|+|Q(0,y)|\neq0.$$

Пусть уравнение (2) имеет периодическое решение $y=\varphi(t)$ с действительным периодом ω, голоморфное в полосе $\tau_1<\operatorname{Im}t<\tau_2$ (τ_1, τ_2 — постоянны), и $D=D\{\varphi(t)\}$ — соответствующая окрестность этого решения. Доказывается теорема: если $t_0=\ln x_0<0$ достаточно велико по модулю и E — ограниченное замкнутое множество, целиком лежащее в D, то всякое решение $y=y(x)$ уравнения (1),

принимающее значение $y_0 = y(x_0) \in E$, допускает для действительных $t = \ln x$ разложение в ряд вида

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)\, e^{jt},$$

где $p_j(t)$ $(j = 0,1, \ldots)$ — периодические функции t с периодом ω, причем $p_0(t) = \varphi(t + C)$ ($C = C(x_0, y_0)$ — постоянная). *Б. П. Демидович*

1195. Об уравнении демпфирующих колебаний с постоянным вращательным моментом. Хейс (On the equation for a damped pendulum under constant torque. Hayes Wallace D.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, 4, № 5, 398—401 (англ.; резюме нем.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = \beta,$$

где α и β — положительные постоянные.

При $\beta > 1$ и $\alpha > 0$ на фазовой плоскости $(\theta; z)$, где $z = \frac{d\theta}{dt}$, существует единственная устойчивая периодическая траектория $y(\theta + 2\pi) \equiv y(\theta)$, которая на цилиндрической фазовой поверхности изображается циклом, охватывающим цилиндр. Для каждого β $(0 < \beta < 1$, когда существуют устойчивая точка покоя и седло) существует бифуркационное значение $\alpha_0 = \alpha_0(\beta)$, при котором цикл вырождается в сепаратриссу, возвращающуюся в седло. Для всех $\alpha < \alpha_0$ цикл существует и те из траекторий, которые при $t \to \infty$ не входят в особую точку, к нему неограниченно приближаются. Для всех $\alpha > \alpha_0$ цикл пропадает и система делается диссипативной (результаты Трикоми, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1933, сер. 11, 2, 1—20; см. Андронов и Хайкин, Теория колебаний, 1937, 427—434). Эти результаты приписываются Сейферту (Seifert G., Z. angew. Math. und Phys., 1952, 3, 468—471), который улучшил оценки для α_0, полученные Трикоми.

Автор улучшает оценки Сейферата для α_0. Практическую ценность представляет утверждение, что при $\alpha^2 > 2(1 - \beta)$ система диссипативна, но при $\alpha < \alpha_0$ приведенным автором методом не получается отделения траекторий, идущих к циклу, от траекторий, входящих в точку покоя. *М. И. Ельшин*

1196. О поведении решений нелинейного дифференциального уравнения $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$, где функция $g(x)$ возрастающая, а $f(x)$ положительна при $|x| > M > 0$. Гальярдо (Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ con $g(x)$ crescente e $f(x)$ positiva per $|x| > M > 0$. Gagliardo Emilio), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 309—314 (итал.)

Исследуются вещественные решения дифференциального уравнения

$$x''(t) + f(x)\,x'(t) + g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные вещественные функции, непрерывные при $|x| < \infty$, $g(x)$ — неубывающая функция, дифференцируемая в точке $x = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$, $f(x) > 0$ при $|x| > M > 0$.

Для решений $x(t)$ уравнения (1) устанавливается следующая альтернатива: либо решение $x(t)$, начиная с некоторого достаточно большого t, монотонно и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, либо решение $x(t)$ осциллирует, т. е. имеет бесконечное множество нулей. Далее доказываются следующие свойства решений уравнения:

1) если $f(0) < 2\sqrt{g'(0)}$, то любое нетривиальное решение $x(t)$ осциллирует;

2) если $f(0) > 0$ и $f(x) \geqslant 0$ при $|x| > 0$, то любое решение стремится к нулю, когда $t \to \infty$;

3) если $f(0) > 2\sqrt{g'(0)}$ и $f(x) \geqslant 0$ при $|x| > 0$, то любое решение монотонно, начиная с некоторого достаточно большого t. Автор не приводит никаких ссылок на литературу. *И. М. Рапопорт*

1197. О траекториях и предельных множествах динамических систем. Врублевская И. Н., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 9—12

Рассматривается метрическое пространство R, в котором задана динамическая система $f(p, t)$. Система топологических отображений $\{F_\lambda\}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ множества $L_0 \subset R$ в множество $L_1 \subset R$ называется правильной деформацией, если: 1) $F_0(L_0) = L_0$, $F_1(L_0) = L_1$; 2) $F_\lambda(p_0)$ — непрерывная функция параметра λ при $p_0 \in L_0$; 3) $F_\lambda(p_0)$ равностепенно непрерывно на множестве $\{p_0 \in L_0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$; 4) обратное отображение $F_\lambda^{-1}(p_0)$ равномерно непрерывно для каждого $\lambda \in [0,1]$. В дальнейшем предполагается, что множество L_0 одного из следующих четырех типов: 1) траектория, 2) полутраектория, 3) ω-предельное множество некоторой траектории; 4) α-предельное множество некоторой траектории. Если существует правильная деформация $\{F_\lambda\}$ множества L_0 в множество L_1, сохраняющая тип (из перечисленных выше), то такие множества называются геометрически эквивалентными. Формулируются следующие утверждения: 1) если незамкнутые полутраектории геометрически эквивалентны, то они одновременно или положительны или отрицательны и их начальные точки соответствуют друг другу; 2) если незамкнутая траектория не является положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону, то любые ее положительные (отрицательные) полутраектории геометрически эквивалентны; 3) если в полном пространстве траектории имеют геометрически эквивалентные положительные (отрицательные) полутраектории, то ω-предельные (α-предельные) множества этих траекторий также геометрически эквивалентны.

Семейство всех траекторий динамической системы распадается на классы геометрически эквивалентных траекторий (геометрические ячейки). Траектории, содержащиеся в одной ячейке, либо все замкнуты, либо все не замкнуты, либо все являются особыми точками. В полном пространстве: а) ω-предельные (α-предельные) множества траекторий одной геометрической ячейки геометрически эквивалентны между собой; б) одноименные полутраектории геометрической ячейки одновременно либо уходящие, либо асимптотические, либо устойчивые по Пуассону.

Для случая плоскости приводятся следующие утверждения: 1) если траектория спиралевидно приближается к точке ω-предельного (α-предельного)

множества, состоящего более чем из одной точки, то все геометрически эквивалентные ей траектории имеют то же самое ω-предельное (α-предельное) множество; 2) если ω-предельное (α-предельное) множество траектории l содержит не принадлежащую l обыкновенную точку, то геометрически эквивалентные l траектории имеют то же самое ω-предельное (α-предельное) множество. *Б. П. Демидович*

1198. О структуре множества, порождаемого интегральными кривыми, стремящимися к особой точке системы дифференциальных уравнений. Шмыдт З., Бюл. Польск. АН, отд. 3, 1953, 1, № 6, 219—223

Исследуется структура множества интегральных кривых системы дифференциальных уравнений $dy_i/dt = F^i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $F^i(0) = 0$ и $F^i_{y_i}(0)$ существуют и конечны в окрестности особой точки $0 = (0, \ldots, 0)$. Устанавливается, что в известных предположениях существует замкнутая окрестность особой точки 0, обладающая тем свойством, что совокупность траекторий системы дифференциальных уравнений, являющихся O^+-кривыми, пораждает множество Q, являющееся гомеоморфным образом замкнутой сферы определенной размерности; при этом множество Q является однолистным множеством и поверхность Q имеет почти всюду касательную плоскость, обладающую в точке 0 некоторым свойством. Последний результат является новым. *А. А. Шестаков*

1199. О предельных множествах в динамических системах. Даукер, Фридлендер (On limit sets in dynamical systems. Dowker Yael Naim, Friedlander F. G.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 14, 168—176 (англ.)

Под дискретной динамической системой авторы понимают пару (X, T), где X — компактное метрическое пространство, а T — его гомеоморфизм. Обозначая множество ω-предельных точек точки $p \in X$ (т. е. множество предельных точек полутраектории $p, Tp, Tp^2, \ldots$) через ω_p, они называют пространство X системы (X, T) ω-предельным множеством, если существуют такая дискретная динамическая система (Y, S) и такая точка $q \in Y$, что $X \subset Y$, $S = T$ на X и $X = \omega_q$ в системе (Y, S). В работе дается внутренняя характеристика ω-предельных множеств. Пространство X называется T-связным, если ни одно его собственное замкнутое подмножество не отображается посредством T в свою внутреннюю часть (если T есть тождественное преобразование, то это определение сводится к обычному определению связности). Оказывается, что пространство X системы (X, T) в том и только в том случае является ω-предельным множеством, если оно T-связно.

Под непрерывной динамической системой авторы понимают пару $(X, \{T_t\})$, где X — компактное метрическое пространство, а $\{T_t\}$ — непрерывная однопараметрическая группа его гомеоморфизмов. На такие системы очевидным образом переносится данное выше определение ω-предельных множеств. Пространство X системы $(X, \{T_t\})$ называется $\{T_t\}$-связным, если для всякого собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ и всякого числа $L \geqslant 0$ существует такое $t > L$, что множество $T_t A$ содержит точку, не являющуюся внутренней для A. Оказывается, что пространство X в том и только в том случае $\{T_t\}$-связно, если оно T_1-связно, и что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы пространство X системы $(X, \{T_t\})$ было ω-предельным множеством.

В заключение авторы устанавливают следующий аналог теоремы Серпинского: в случае дискретной динамической системы ω-предельное множество не может быть разложено в сумму конечной или счетной совокупности непересекающихся непустых инвариантных замкнутых множеств, число которых $\geqslant 2$. Подобные динамические системы рассматривались ранее (Немыцкий В. В., Матем. сб., 1948, 23, № 2, 161—186). *В. А. Рохлин*

1200. О некоторых теоремах осреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Демидович Б. П., Матем. сб., 1954, 35, № 1, 73—92

Изучается система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

где x и f — n-мерные векторы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Пусть

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \varepsilon)\, dt \tag{2}$$

существует и не зависит от $T > 0$; тогда система

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}) \tag{3}$$

называется осредненной. Работа посвящена отысканию некоторых условий, гарантирующих близость решений систем (1) и (3), если близки их начальные данные, а ε достаточно мало. Этой проблеме в различных аспектах посвящены работы Фату (Fatou M. P., Bull. Soc. math. France, 1928, 56, 98—133), Мандельштама и Папалекси (Ж. эксперим. и теор. физики, 1934, 4, № 2, 117—122), Боголюбова (О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН СССР, 1945) и др.

Основная теорема. Пусть $f(t, x, \varepsilon)$ непрерывна, и в каждой компактной части σ области изменения t и x удовлетворяет условиям:

$$\| f(t, x, \varepsilon) \| \leqslant M,$$

$$\| f(t, \tilde{x}, \varepsilon) - f(t, x, \varepsilon) \| < L \| \tilde{x} - x \|,$$

где $M = M(\sigma)$ и $L = L(\sigma)$ не зависят от ε; пусть, кроме того, предел (2) существует равномерно на каждой компактной части D области изменения x.

Тогда для всякого решения $x = x(t, \varepsilon)$ системы (1), такого, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t_0, \varepsilon) = x_0, \tag{4}$$

имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t), \tag{5}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(t)$ — решение (3) с начальным условием $\bar{x}(t_0) = x_0$, причем (5) выполнено равномерно на

каждом конечном отрезке $[t_0, t_0+\bar{t}]$, принадлежащем интервалу определения $x(t)$.

Эта теорема применяется к некоторым периодическим и почти периодическим системам.

Приведем, например, следующую теорему:

Теорема 3. Пусть А) $\frac{dx}{dt} = P(t, \varepsilon)\,x$, матрица $P(t, \varepsilon)$ — периодическая с периодом $\tau = \tau(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и равномерно ограниченная при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$; Б) существует $\bar{P} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} P(t, \varepsilon)\,dt$; В) корни векового уравнения $\det|\bar{P} - \lambda E| = 0$ различны и имеют отрицательные вещественные части. Тогда равномерно по t в промежутке (t_0, ∞) выполняется равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t)$, если только

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t_0, \varepsilon) = \bar{x}(t).$$

Теоремы, близкие по содержанию к приведенной, доказаны еще для случая почти периодической матрицы $P(t, \varepsilon)$, подчиненной некоторым условиям.

Р. Э. Виноград

1201. Обобщение одной теоремы А. М. Ляпунова. Рябов Ю. А., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 131—150

Рассматривается вопрос о существовании периодических решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = -\mu y + X, \quad \frac{dy}{dt} = \mu x + Y, \tag{1}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + a_s x + b_s y + X_s,$$

где μ, a_s, b_s (в статье опечатка: a_s, b_s стоят без индекса), $a_{s1}, \ldots, a_{sn}$ — постоянные, а X, Y, X_s — степенные ряды от x, y, $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами, начинающиеся с членов не ниже 2-го порядка. Обобщая результаты Ляпунова, автор доказывает, что если можно найти формально удовлетворяющие системе (1) ряды

$$x = cx^{(1)} + c^2x^{(2)} + \ldots$$
$$y = cy^{(1)} + c^2y^{(2)} + \ldots$$
$$x_s = cx_s^{(1)} + c^2x_s^{(2)} + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где c — произвольная постоянная, $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ — периодические функции t, причем $x^{(k)}(t_0) = y^{(k)}(t_0) = 0$ при $k > 1$, то найденные ряды сходятся абсолютно во всяком случае, пока c не превосходит по модулю некоторой величины, и представляют периодическое решение системы. На самом деле это доказательство имеет силу только при том условии, когда при помощи преобразований, указанных А. М. Ляпуновым, и последующего линейного преобразования с постоянной матрицей система (1) переходит в систему

$$\frac{dz_0}{d\theta} = Z_0, \quad \frac{dz_s}{d\theta} = \lambda_s z_s + \sigma_{s-1}z_{s-1} + \varphi_s z_0 + Z_s,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — постоянные, $\sigma_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — корни уравнения

$$\det[\,\|\mu^{-1}a_{ij}\| - \lambda E] = 0,$$

φ_s — квадратичные формы $\cos\theta$ и $\sin\theta$, а Z_0, Z_s — голоморфные функции переменных $z_0, z_1, \ldots, z_n$, разложения которых по целым положительным степеням $z_0, z_1, \ldots, z_n$ начинаются с членов не ниже 2-го порядка, причем коэффициенты этих разложений являются многочленами относительно $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Таким образом, автору необходимо предположить, что характеристические числа μi,— μi матрицы коэффициентов линейной системы, соответствующей уравнениям (1), либо простые, либо им соответствуют простые элементарные делители.

Автор молчаливо предполагает, что нулевые корни λ_i $(i = N+2, \ldots, N+Q)$ не имеют простых элементарных делителей, хотя на самом деле это предположение для его метода доказательства несущественно. Отмечается, что, кроме постоянной c, семейство периодических решений может содержать и другие произвольные постоянные.

Аналогичные результаты получены для системы:

$$\frac{dx}{d\theta} = X, \quad \frac{dx_s}{d\theta} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_s x + X_s$$
$$(s = 1, \ldots, n),$$

где $p_{s1}, \ldots, p_{sn}$, q_s — периодические непрерывные функции θ.

Отмечено, что если $X \equiv 0$, то $x = \varepsilon$ постоянно и система

$$\frac{dx_s}{d\theta} = X_s(\theta, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$$
$$(s = 1, \ldots, n)$$

будет иметь семейство периодических решений

$$x_s = \varepsilon x_s^{(1)} + \varepsilon^2 x_s^{(2)} + \ldots$$
$$(s = 1, \ldots, n)$$

с периодическими коэффициентами $x_s^{(k)}$, если эти ряды формально удовлетворяют уравнениям. Если найдутся ряды вида

$$x_s = \varepsilon^{1/\nu}x_s^{(1)} + \varepsilon^{2/\nu}x_s^{(2)} + \ldots$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

с периодическими коэффициентами $x_s^{(k)}$, формально удовлетворяющие последним уравнениям, то они также при достаточно малых по модулю ε будут сходиться и представят семейство периодических решений.

Н. П. Еругин

1202. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. Лебедев А. А., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 139—148

Приводится способ построения функций Ляпунова для общего случая неустановившегося движения. Этот способ используется для оценки решений системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{in}(t)\,x_n + X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Поведение интегральных кривых на данном интервале времени, конечном или бесконечном, рассматривается по отношению к системе замкнутых поверхностей

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi^2(t) \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j\right]^2 = c.$$

Здесь c—параметр, изменяющийся от нуля до некоторого достаточно малого значения; $a_{ij}(t)$— функции коэффициентов $p_{ij}(t)$, выбранные определенным образом; $\varphi(t) \geqslant \delta > 0$ — ограниченная функция, причем верхняя грань $D(t)$ расстояний между любыми двумя точками области

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant A \qquad (1)$$

удовлетворяет неравенству

$$D(t) / D(t_0) \leqslant f(t, t_0) \qquad (2)$$

(A— достаточно малое число, $f(t, t_0)$ — наперед заданная функция).

Нулевое решение системы называется устойчивым по отношению к области V на интервале $[t_0, T]$, если при всех начальных возмущениях $x_1(t_0) = x_{10}$, удовлетворяющих условию $V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = A$, решения $x_i(t)$ на данном интервале времени удовлетворяют неравенству (1).

Даются достаточные условия устойчивости в этом смысле. Устанавливаются необходимые и достаточные условия устойчивости по отношению к области V, определенной на интервале $[T_1, T_2]$, при любом выборе начального момента t_0, $T_1 \leqslant t_0 < T_2$; причем для $\varphi(t)$ условие (2) должно выполняться при любом t_0. *Г. В. Каменков*

1203. О достаточных условиях устойчивости нулевых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка и системы n-однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Гинзбург И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 5, 53—65

Уравнение

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_n(t)\,y = 0,$$

коэффициенты которого имеют первые производные, записывается в виде системы линейных уравнений с неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нулевое решение последней исследуется на устойчивость в смысле Ляпунова.

Рассматривается квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ii} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k<i/2} A_{i,\,i-2k}\,y_i y_{i-2k}\right), \qquad (1)$$

коэффициенты которой выражаются через A_{nn} и функции $a_{ik}(t)$:

$$A_{i,\,i-2k} = \frac{A_{nn}}{a_1}\sum_{l=1}^{i-2k}(-1)^{l+1}\,a_{n-i+1-l}\,a_{n-i+2k+l} \qquad (2)$$

($i = 1,2, \ldots, n$; $k = 0,1,2, \ldots < i/2$) (при постоянных a_i соотношения (2) являются необходимыми условиями отрицательности dV/dt). Из условий Сильвестра для определенной положительности формы V и положительности формы $(-dV/dt)$ выводятся достаточные условия устойчивости нулевого решения. Метод прилагается к разысканию достаточных условий устойчивости для уравнений второго, третьего и четвертого порядков.

Аналогичный способ предлагается для исследования системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

когда $a_{ij}(t)$ имеют первые производные. Функция Ляпунова и в этом случае берется в форме (1), где

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,x_j,$$

$$y_3 = \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} a_{1j_1}\,a_{j_1 j_2}\,x_{j_2},\ \ldots,$$

а A_{ij} выражаются по формулам (2), в которых $a_i(t)$ надо считать коэффициентами уравнения

$$\det[\,\|\,a_{ij}\,\| - \lambda E] = 0.$$

Способ иллюстрируется примером исследования системы второго порядка. *А. Ф. Андреев*

1204. Линейные дифференциальные и разностные уравнения, имеющие монотонные решения. Хартман, Винтнер (Linear differential and difference equations with monotone solutions. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 731—743 (англ.)

Пусть функции $f_0(t), \ldots, f_n(t)$, непрерывные при $0 < t < \infty$, таковы, что

$$f_0(t) > 0,\ f_1(t) \not\equiv 0,\quad f_k(t) \geqslant 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$
$$0 < t < \infty.$$

Показывается, что уравнение

$$f_0(t)\,y^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} f_k(t)\,y^{(n-k)}(t) = 0 \qquad (1)$$

имеет по крайней мере одно положительное решение $y = y(t)$, которое не убывает, и

$$(-1)^j y^{(j)}(t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad j < n \ (0 < t < \infty).$$

Если же $f_0(t) > 0$, $(-1)^j f_0^{(j+1)}(t) \geqslant 0$, $(-1)^j f_k^{(j)}(t) \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots)$, $0 < t < \infty$, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение $y(t)$, которое тоже строго монотонно при $0 < t < \infty$. Оба утверждения верны и при $0 \leqslant t < \infty$.

Рассматривается затем уравнение

$$f_0(m)\,\Delta^n y(m) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k(m)\,\Delta^{n-k} y(m) = 0 \quad (2)$$

$$(m = 0, 1, \ldots),$$

в котором $f_0(m) > 0$, $f_1(m) \not\equiv 0$, $f_k(m) \geqslant 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ и $f_0(m) - \sum_{k=1}^{n} f_k(m) > 0$.

Доказывается, что уравнение (2) имеет по крайней мере одно решение $y = y(m)$ такое, что

$$y(m) > 0,\ (-1)^j \Delta^j y(m) \geqslant 0\ (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Доказывается аналогичное предложение и в отношении строго монотонного решения уравнения (2).

Статья является обобщением ранее полученных результатов этих же авторов (Amer. J. Math., 1949, **71**, 367—372; 1950, **72**, 124—128; 1951, **73**, 173—180, 792—806). *А. А. Миролюбов*

1205. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. Немыцкий (Probleme ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale. Némiţchi V. V.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1953, **6**, № 4, 34—55 (рум.)

Перевод статьи из журнала «Вестн. Моск. ун-та», 1952, № 8,19—39.

1206. О периодических колебаниях систем Ляпунова в одном особом случае. Соколов В. М., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1954, **51**, 12—19

В книге Г. Н. Дубошина «Основы теории устойчивости движения» (Изд. Моск. ун-та, 1952 г.) на стр. 277 обобщено утверждение А. М. Ляпунова о существовании периодических решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений, которой отвечает характеристическое уравнение, имеющее мнимые корни.

В реферируемой работе автор, не ссылаясь на Г. Н. Дубошина, пытается для частного вида системы освободиться от ограничений, наложенных на корни характеристического уравнения в отмеченном выше утверждении. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1} x_1 + \ldots + a_{s,\,n+4} x_{n+4} + X_s(x_1, \ldots, x_{n+4}) \quad (1)$$

$$(s = 1, \ldots, n+4),$$

где a_{sk} — постоянные, X_s — голоморфные в окрестности нуля функции, разложение которых по степеням x_s не содержит членов ниже второго порядка.

Делаются следующие предположения.

1. Характеристическое уравнение $\| a_{sk} - \delta_{sk}\lambda \| = 0$ имеет две пары чисто мнимых корней вида $\pm\lambda i$ и $\pm k\lambda i$, где k — целое число, и не имеет других чисто мнимых корней того же вида.

2. Система (1) допускает первый интеграл

$$H(x_1, \ldots, x_{n+4}) = \text{const}, \quad (2)$$

где H — голоморфная в окрестности нуля функция, разложение которой по степеням x_s не содержит членов первого порядка, но содержит члены второго порядка.

Кроме того, автор, не формулируя этого явно, предполагает, что при $k = 1$ двукратным корням $\pm\lambda i$ отвечают простые элементарные делители матрицы $\| a_{sk} \|$.

При сделанных предположениях устанавливаются условия существования периодического решения системы (1), зависящего от одной произвольной постоянной.

Работа содержит неточность: автор преобразует систему (1) так, чтобы матрица коэффициентов первого приближения имела частично вещественный канонический вид (по отношению к выделенным корням $\pm\lambda i$ и $\pm k\lambda i$). При этом необоснованно утверждается, что интеграл (2) преобразуется к виду

$$k_1(x_1^2 + y_1^2) + x_2^2 + y_2^2 + W(x_1 y_1, x_2 y_2, z_1, \ldots, z_n), \quad (3)$$

где W — голоморфная в окрестности нуля функция, разложение которой по степеням $x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots z_n$ не содержит членов ниже третьего порядка относительно x_1, y_1, x_2, y_2 и членов ниже второго порядка относительно $z_1, \ldots, z_n$. Можно привести пример, когда в выражении (3) не будет содержаться членов $x_2^2 + y_2^2$, тогда дальнейшие рассуждения автора теряют силу. Доказательство можно исправить, если наложить на интеграл (2) дополнительное ограничение, аналогичное ограничению Г. Н. Дубошина в упомянутой работе.

В. П. Васов

1207. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Майзель А. Д., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1954, **51**, 20—50

В работе обобщаются некоторые теоремы И. Г. Малкина, К. П. Персидского и О. Перрона (И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1952, § 75, теоремы 1, 2, § 88, теоремы 1, 2, 3) на случай условной устойчивости. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x + f(t, x), \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x \quad (2)$$

— нелинейная и соответствующая линеаризированная системы дифференциальных уравнений (x — вектор, $P(t)$ — матрица, элементы которой вещественные и ограниченные при $t \to \infty$ функции, $\| f(t, x) \| < A \| x \|^{\gamma}$, $\gamma > 1$).

Рассматриваются свойства системы (2)

$\mathfrak{M}_V$: существует квадратичная форма $V(t, x) = (V(t)\,x, x)$ с ограниченными коэффициентами, полная производная которой по t, составленная в силу уравнений (2), будет определенно отрицательной формой;

$\mathfrak{M}_f$: соответствующая неоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x + f(t) \quad (3)$$

обладает по крайней мере одним ограниченным решением для любой ограниченной вектор-функции $f(t)$.

$\mathfrak{M}_x$: существует фундаментальная система решений $x_i(t, t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определенная начальными условиями $x_i(t_0, t_0) = a_i(t_0)$, такая, что $|\operatorname{Det}[a_{ij}(t_0)]| > A > 0$, $t_0 \to \infty$; для m ($\leqslant n$) решений выполняются при всех $t \geqslant t_0$ неравенства $\|x_i(t, t_0)\| < Me^{-\alpha_i(t-t_0)}$, для остальных $n - m$ решений при всех $t \leqslant t_0$ справедливы неравенства $\|x_i(t, t_0)\| > Me^{\alpha_i(t-t_0)}$ ($\alpha_i > 0$, M не зависят от t и t_0).

Доказывается равносильность свойств $\mathfrak{M}_V$, $\mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{M}_x$. При этом система (3) имеет ограниченное решение, зависящее от m произвольных параметров и квадратичная форма V приводится к каноническому виду с m положительными квадратами. Из критерия условной устойчивости О. Перрона автор выводит следующее: если система (2) обладает одним из свойств $\mathfrak{M}_V$, $\mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{M}_x$, то тривиальное решение системы (1) обладает условной устойчивостью (на начальные условия накладывается $n - m$ связей).

Автор не учитывает в своих исследованиях работу Белмана (Bellman, Ann. Math., 1946, **49**, 515—522), из результатов которой могут быть выведены некоторые его утверждения. *В. А. Якубович*

1208. Приведение дифференциальных выражений второго и четвертого порядка к самосопряженному виду: Яценко Г. П., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, **12**, 182—187

Несколько обобщая рассуждения автора, рассмотрим дифференциальный оператор $L(u)$ и сопряженный оператор $M(z)$. Если z — частное решение уравнения $M(z) = 0$, то выражение $\bar{z}L(u)$ является полным дифференциалом и можно написать

$$\bar{z}L(u) = \frac{d}{dx}\Phi(u). \qquad (1)$$

Примем теперь y за независимое переменное. Тогда

$$\bar{z}L(u) = \frac{d}{dy}\Phi(u)\frac{dy}{dx}.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = \bar{z}$, получим $L(u) = \frac{d}{dy}\Phi(u)$. Исходя из этой формулы, иногда удается привести оператор четного порядка $L(u)$ к самосопряженному виду.

Таким путем автор приводит к самосопряженному виду два оператора:

$$L_1(u) = p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + r(x)\frac{du}{dx}$$

и

$$L_2(R) = \frac{d^4R}{dx^4} + 2\frac{1}{x}\frac{d^3R}{dx^3} - (1 + 2k^2)\frac{1}{x^2}\frac{d^2R}{dx^2} + (1 + 2k^2)\frac{1}{x^3}\frac{dR}{dx}.$$

Оператор $L_2(R)$ связан с уравнением колебания диска постоянной толщины. В первом случае, как указано, получается уже известный результат, во втором при $x^2/2 = y$ оказывается

$$L_2(R) = 2\frac{d^2}{dy^2}\left[2y^2\frac{d^2R}{dy^2} - k^2R\right].$$

Автор не пользуется ни понятием сопряженного оператора, ни результатом, который выражается формулой (1), а приходит к ним в каждом отдельном случае интегрированием по частям, что не способствует выяснению существа дела. На стр. 186 имеются две опечатки: строка 13, вместо $z = xm$ должно быть $z = x^m$; строка 18, вместо $m = 2$ должно быть $m = 3$. *П. Д. Калафати*

1209. Двухточечная краевая задача для обыкновенных самосопряженных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Стернберг, Стернберг (A two-point boundary problem for ordinary self-adjoint differential equations of fourth order. Sternberg H. M., Sternberg R. L.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 416—419 (англ.)

Изучается двухточечная векторная краевая задача

$$[P_0(x)u'']'' - [P_1(x)u']' + P_2(x)u = 0, \qquad (1)$$

$$u(x_1) = u'(x_1) = 0 = u'(x_2) = u(x_2), \qquad (2)$$

где $P_i(x)$ — действительные симметрические матрицы-функции порядка m. $P_0(x)$ положительно определена, $P_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) — класса C^{2-i} на интервале (a, ∞). Под решением задачи (1) — (2) понимается m-мерный вектор $u = u(x)$ класса C^2 на (a, ∞), причем $P_i(x)\cdot u^{(2-i)}(x)$ принадлежит классу C^{2-i} на (a, ∞).

В работе доказана следующая теорема:

Если для некоторого действительного числа $k_0 > 0$ каждая из матриц $P_0 - k_0 I$, P_1, P_2 неположительна на $[a, \infty)$ и если существует $a_0 \geqslant a$ такое, что для произвольных x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам $a_0 \leqslant x_1 < x_2 < \infty$, задача (1) — (2) имеет только тривиальное решение, то несобственные матричные интегралы

$$\int_a^\infty P_1(x)\,dx, \qquad \int_a^\infty x^2 P_2(x)\,dx$$

существуют и для каждого m-мерного постоянного вектора π, для которого $\pi\cdot\pi^* = 1$, справедливы неравенства

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|x\pi^*\int_x^\infty P_1(t)\,dt\,\pi\right| \leqslant 2k_0;$$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|x\pi^*\int_x^\infty t^2 P_2(t)\,dt\,\pi\right| \leqslant 8k_0.$$

Б. М. Левитан

1210. Теория колебаний Штурма. Уотсон (The Sturmian theory of oscillations. Watson A. G. D.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 15—17 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x} = -f(t)y, \quad \dot{y} = g(t)x, \qquad (1)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — непрерывные, вещественные функции и $f(t) > 0$ в интервале (t_0, t_1). К этой системе

сводится уравнение

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0,$$

если положить

$$f = \exp\left\{-\int\left(\frac{p_1}{p_0}\right)dt\right\},$$

$$g = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)\exp\left\{\int\left(\frac{p_1}{p_0}\right)dt\right\}.$$

Для системы (1) доказываются теоремы сравнения, имеющие основное применение к изучению собственных значений систем, содержащих параметр.

В. М. Соколов

1211. Замечание о несамосопряженной системе дифференциальных уравнений второго порядка. Уайберн (Note on a non-self-adjoint differential system of the second order. Whyburn W. M.), J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1953, 69, № 2, 116—118 (англ.)

Обобщаются некоторые результаты предыдущей статьи автора (Hinds A. K., Whyburn W. M., J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1952, 68, 32—43), относящиеся к асимптотическому поведению собственных функций и собственных значений системы уравнений $y'(x,\lambda) = K(x,\lambda)z(x,\lambda)$, $z'(x,\lambda) = G(x,\lambda)y(x,\lambda)$ с граничными условиями

$$\gamma(x,\lambda)z(x,\lambda) - \delta(x,\lambda)y(x,\lambda) = 0,$$

$$\alpha(x,\lambda)z(x,\lambda) - \beta(x,\lambda)y(x,\lambda) = 0.$$

В. В. Немыцкий

1212. О лакунах в спектре уравнения Хилла. Патнам (On the gaps in the spectrum of the Hill equations. Putnam C. R.), Quart. Appl. Math., 1954, 11, № 4, 496—498 (англ.)

Изучается уравнение Хилла

$$\ddot{x} + [\lambda + f(t)]x = 0, \qquad (1)$$

где

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \quad (c_n = \overline{c}_{-n})$$

действительная непрерывная периодическая функция периода 1. Известно, что (если $f \not\equiv 0$) существует последовательность замкнутых интервалов I_k: $\lambda_k \leqslant \lambda \leqslant \lambda^k$ (области устойчивости), причем $\lambda_k < \lambda^k < \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что уравнение (1) имеет ограниченное в интервале $(-\infty, \infty)$ решение $\not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in S = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$. Дополнительное к S множество состоит из полупрямой $-\infty < \lambda < \lambda_1$ и последовательности открытых интервалов J_k: $\lambda^k < \lambda < \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

В реферируемой работе дается оценка сверху $\lambda_{k+1} - \lambda^k$, т. е. длин интервалов J_k в зависимости от коэффициентов Фурье $f(t)$. Обозначим через $m(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ расстояние от точки λ до множества S. Справедлива следующая оценка:

$$m^2(\lambda) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

если только $\lambda \geqslant -c_0$. Из этой оценки следует оценка

$$\lambda_{k+1} - \lambda^k \leqslant 2\left[2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right]^{1/4},$$

если только

$$\frac{1}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda^k) \geqslant -c_0.$$

Б. М. Левитан

1213. Достаточное условие существования бесконечного дискретного спектра. Патнам (A sufficient condition for an infinite discrete spectrum. Putnam C. R.), Quart. Appl. Math., 1954, 11, № 4, 484—487 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'' + f(t)x = 0,$$

где $f(t)$ — вещественная функция, непрерывная на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$. Уравнение называется колебательным, если всякое его решение обладает простирающимся до $t = \infty$ бесконечным множеством нулей. Доказана теорема: Пусть $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, тогда уравнение будет колебательным, если для всякого фиксированного $\gamma \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\, h\left(\overline{\lim_{S\to\infty}} S\left[\overline{\lim_{T\to\infty}}\int_S^T f(t)\,dt + \int_0^S f(t)\,|(t-\gamma)/(S-\gamma)|^{1+h}\,dt\right]\right) > \frac{1}{4}.$$

Указывается, что эта теорема может быть применена к исследованию граничной задачи, определяемой дифференциальным уравнением $x'' + (\lambda + f(t))x = 0$ и граничным условием $x(0)\cos\alpha + x'(0)\sin\alpha = 0$, $0 \leqslant \alpha < \pi$.

В качестве примера дается критерий колебательности уравнения (возникающего из проблемы двух частиц в квантовой механике)

$$R'' + c\left(-V(r) - \frac{l(l+1)}{cr^2}\right)R = 0$$

в предположении, что $V(r) \to 0$ при $r \to \infty$ и непрерывна для достаточно больших r.

Автор отмечает, что возникающая здесь особенность в точке $r = 0$ не препятствует применению его теоремы.

Е. А. Барбашин

1214. О непрерывном спектре сингулярных краевых задач. Патнам (On the continuous spectra of singular boundary value problems. Putnam C. R.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 420—426 (англ.)

Изучается задача на собственные значения:

$$(px')' - fx + \lambda x = 0, \qquad (1)$$

$$x(0)\cos\alpha + x'(0)\,p(0)\sin\alpha = 0,\ 0 \leqslant \alpha < \pi, \quad (2_\alpha)$$

где $p(t) > 0$; $p(t)$, $f(t)$ непрерывны на положительной полупрямой $0 \leqslant t < \infty$. Через $\rho_\alpha(\lambda)$ обозначается спектральная функция задачи (1) — (2_α), через C_α — непрерывный спектр этой задачи. Доказана следующая теорема:

Пусть для уравнения (1) имеет место случай предельной точки. Предположим, что существует фиксированный интервал Δ и два различных краевых условия (2_{α_1}) и (2_{α_2}), $\alpha_1 \neq \alpha_2$, таких, что Δ принадлежит к C_{α_1} и к C_{α_2} и спектральная функция $\rho_{\alpha_1}(\lambda)$ на Δ абсолютно непрерывна по отношению к $\rho_{\alpha_2}(\lambda)$. Тогда:

1. Интервал Δ принадлежит к непрерывному спектру C_α для каждого α, $0 \leqslant \alpha < \pi$.

2. Функция $\rho_{\alpha_1}(\lambda)$ на интервале Δ абсолютно непрерывна по отношению к любой функции $\rho_\alpha(\lambda)$, $0 \leqslant \alpha < \pi$. *Б. М. Левитан*

1215. О распространении некоторых моментов теории Пуанкаре на системы двух дифференциальных уравнений с тремя переменными. Америо (Sur l'extension de quelques points de la théorie de Poincaré aux systèmes de deux équations différentielles à trois variables. Amerio Luigi), Actes du Colloq. internat. vibrations non linéaires. Ile de Porquerolles, 1951, 261—269, Publ. Sci. tech. Ministère de l'air, Paris, 1953, № 281 (франц.)

В основном изложение результатов, уже опубликованных автором в другом месте (Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1951, (8), 10, 206—212, 289—297). Кратко указано несколько дополнительных результатов. *L. A. MacColl*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 224.

1216. Заметка о свойствах решений дифференциального уравнения, которые можно вывести непосредственно из самого дифференциального уравнения. Ван-дер-Поль (Note sur les propriétés des solutions d'une équation différentielle, que l'on peut déduire directement de l'équation différentielle elle-même. Note on the properties of solutions of a diffierential equation which may be derived directly from the differential equation itself. Van der Pol Balth.), Actes Colloq. internat. vibrations non lineaires, Ile de Porquerolles, 1951, 159—167, Publ. sci Tech. Ministère de l'air, Paris, 1953, № 281 (франц., англ.)

Если обыкновенное дифференциальное уравнение имеет решение периода T, то многие полезные соотношения, содержащие средние за период значения, могут быть выведены при помощи умножения дифференциального уравнения на соответствующие функции независимого переменного и их производные и последующего интегрирования по периоду. Те же приемы часто применимы для непериодических решений, если интегрирование производить от одного нуля решения до другого. Эти приемы иллюстрированы числовыми примерами. *W. Wasow*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 127.

1217 К. Курс дифференциальных уравнений. Степанов В. В. (Учебник для гос. ун-тов), 476 стр. Латгосиздат, Рига, 1953 (лат.)

Перевод с русского издания. См. РЖМат, 1953, 249К.

1218 К. Элементарная теория дифференциальных уравнений. Келс (Elementary differential equations. Kells Lyman M., 4. ed., X + 266 p., McGraw-Hill Book Co., New York, 1954, 4.00 doll.) (англ.)

1219 К. Дифференциальные уравнения. Трикоми (Equazioni differenziali. Tricomi Francesco Giacomo, 353 pp. Seconda edizione riveduta e ampliata. Ed. Scient. Einaudi, Torino, 1953, 4000 l.) (итал.)

Учебное пособие по теории обыкновенных дифференциальных уравнений для студентов университетов, написанное в оригинальном плане. Вопросы интегрирования в квадратурах почти совершенно опущены. С другой стороны, с достаточной простотой и ясностью изложены некоторые вопросы современной теории, относящиеся к геометрической теории динамических систем на плоскости (гл. II), теории краевых задач и асимптотического поведения решений линейных уравнений 2-го порядка (гл. III и IV), аналитической теории дифференциальных уравнений (гл. V). Эти отделы читаются независимо друг от друга. Автор сумел на сравнительно простом материале ввести читателя в круг современных идей, подготовить его к чтению оригинальных работ и к самостоятельному исследованию. Указаны направления дальнейшего развития рассматриваемых вопросов, в связи с чем приводится литература.

Глава I содержит традиционные теоремы существования и единственности с условием Липшица. Отметим подробное исследование свойств тригонометрических функций и эллиптических функций Якоби, рассматриваемых как решения системы дифференциальных уравнений.

В главу II включено геометрическое исследование систем $dx/dt = P(x, y)$, $dy/dt = Q(x, y)$. После вводных замечаний и подробного анализа в случае линейных функций P и Q автор рассматривает случай, когда $P \equiv H + F$, $Q \equiv K + G$, где $H(x, y)$ и $K(x, y)$ однородные многочлены степени $m \geqslant 1$, не имеющие общих вещественных множителей, причем $xK - yH \not\equiv 0$, а $|F| + |G| = o(x^2 + y^2)^{m/2}$. Здесь характер особой точки (0, 0) изучается просто и достаточно глубоко. Вводятся и применяются индексы Пуанкаре. Особенно подробно рассматривается случай $m = 1$ (на основе сравнения с укороченной системой). Далее изучаются предельные циклы, причем приводится обобщение теоремы Левинсона и Смита о существовании и единственности периодического решения уравнения $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ в определенных предположениях. Рассматриваются также условия существования периодического решения уравнения $y' = f(x, y)$.

В главе III изучается краевая задача

$$hy(a) + h'y'(a) = A,\ ky(b) + k'y'(b) = B \qquad (1)$$

для общего линейного однородного уравнения 2-го порядка. После предварительных замечаний доказывается теорема Валле Пуссена об оценке снизу длины интервала между корнями решения. Излагается теорема Сонина — Полиа о последовательности экстремумов решения. Далее автор переходит к различным теоремам о сравнении и их следствиям. В связи с изучением самосопряженных уравнений излагается важный метод Прюфера исследования системы $dy/dx = z/p(x)$, $dz/dx = -P(x)y$ посред-

ством перехода к полярным координатам в плоскости (y, z). Здесь также доказаны некоторые теоремы о сравнении и о колебании решений, на основе чего удается легко доказать существование бесконечного количества собственных значений для уравнения $d[p(x)\,dy/dx]/dx + P(x,\lambda)\,y = 0$ при однородных краевых условиях вида (1), если $\Lambda < \lambda < \Lambda^*$, $P(x, \lambda) \to -\infty$, при $\lambda \to \Lambda$; $P(x, \lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \Lambda^*$ (равномерно по x). Рассматривается зависимость собственных значений от коэффициентов, откуда получается оценка асимптотического поведения собственных значений. Показано приведение задачи к интегральному уравнению при помощи функции Грина.

Глава IV посвящена изучению некоторых асимптотических методов. Здесь основным является метод Лиувилля — Стеклова — Фубини приведения уравнения

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y$$

при помощи вариации произвольных постоянных к интегральному уравнению типа Вольтерра и, в связи с этим, выражения решения через резольвенту. Так рассматривается поведение решений уравнения

$$y'' + Q(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

при $x \to \infty$, если $Q(x) \to 1$. Случай $Q(x) \to -1$ исследуется при помощи рассмотрения некоторых квадратичных функций от решения (при исследовании уравнения (2) излагается ряд результатов Асколи). Далее автор переходит к изучению асимптотического поведения собственных значений и собственных функций для уравнения $z'' + [\mu^2 - Q(x)]\,z = 0$ при однородном краевом условии (1), причем оценка получается с точностью до $O(n^{-2})$. В качестве примеров сингулярных краевых задач рассматривается задача о собственных значениях для уравнения $xy'' + (\alpha + 1 - x)\,y' + \lambda y = 0$ $(0 \leqslant x < \infty)$, приводящая к обобщенным многочленам Лагерра, а также задача для уравнения Лежандра. Исследуется асимптотическое поведение многочленов Лагерра и Лежандра.

Глава V начинается с изложения теоремы существования в комплексной области (по Коши). Далее автор рассматривает особые точки для линейных уравнений 2-го порядка и структуру решений вблизи них, в связи с чем приходит к уравнениям типа Фукса, интегрированию при помощи рядов и гипергеометрической функции. Далее при помощи последовательных приближений доказывается теорема об асимптотическом разложении (по Пуанкаре) решений уравнения

$$y'' + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{-i} y' + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{-i} y = 0.$$

На основании этого получаются асимптотические разложения для вырожденных гипергеометрических и бесселевых функций.

Некоторые места (например, на стр. 73, 109 и 123) изложены недостаточно точно. Доказательство обобщенной теоремы Левинсона — Смита (стр 116) не ясно, если не сделать дополнительного предположения $\liminf_{x\to\infty} g(x) > 0$. Не всюду точно указан класс исследуемых функций.

Замеченные опечатки: на стр. 53, строка 12 сверху, должно быть A вместо B; на стр. 330, строка 5 сверху, должно быть — η_1 вместо η, а в следующей строке должно быть — η_2 вместо η. *А. Д. Мышкис*

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1220. Еще о расширении понятия задачи Коши для уравнения $p = f(x,y,z,q)$ Чинкуини-Чибрарио, Чинкуини (Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x,y,z,q)$. Cinquini Cibrario Maria, Cinquini Silvio), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1952, 6, № 3—4, 187—243 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

На задачу Коши $p = f(x, y, z, q)$, $z(0, y) = \varphi(y)$ $(g_0 \leqslant y \leqslant h_0)$ переносится подход Каратеодори (Carathéodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1918), развитый им для уравнения $y' = f(x, y)$. Работа является продолжением статей тех же авторов (Ann. mat. pura ed appl., 1951, **32**, 121—155) и статьи Чинкуини (Rend. Accad. naz. dei Lincei, 1951, **11**, 255—259); на методы, результаты и даже формулы первой статьи имеется много ссылок. Работа обобщает ряд предшествующих результатов других авторов (указана литература; см., в частности, РЖМат, 1953, 1204).

Пусть функция f задана при $0 \leqslant x \leqslant a_0$, $g(x) \leqslant y \leqslant h(x)$ (это ограничение характерно), $\alpha_0 \leqslant z \leqslant \beta_0$, $\gamma_0 \leqslant q \leqslant \delta_0$; здесь $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны, $g(x) < h(x)$ $(0 \leqslant x < a_0)$, $g(0) = g_0$, $h(0) = h_0$. Пусть функции f, f_y, f_z и f_q измеримы по x и непрерывны по (y, z, q), а при фиксированном x удовлетворяют условию Липшица с константой $L(x)$ и ограничены по абсолютной величине константой $M(x)$, где $L(x)$ и $M(x)$ суммируемы на $[0, a_0]$. Пусть $\varphi'(y)$ удовлетворяет условию Липшица на $[g_0, h_0]$, причем $\alpha_0 < \varphi < \beta_0$, $\gamma_0 < \varphi' < \delta_0$. Тогда существуют $a \in (0, a_0]$, непрерывные функции $u_g(x)$ и $u_h(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a$; $g(x) \leqslant u_g(x) < u_h(x) \leqslant h(x)$ $(0 \leqslant x < a)$; $u_g(0) = g_0$; $u_h(0) = h_0)$ и функция $z(x, y)$ $(0 \leqslant x \leqslant a$, $u_g(x) \leqslant y \leqslant u_h(x))$, которая вместе с z_y непрерывна по (x, y), удовлетворяет условию Липшица по y и абсолютно непрерывна по x; при этом для любого фиксированного y функция $z(x, y)$ удовлетворяет почти для всех x уравнению $p = f$ и удовлетворяет начальному условию. Доказательство проводится методом характеристик с применением теорем Каратеодори. Приводятся достаточные условия того, чтобы можно было положить $u_g(x) \equiv g(x)$, $u_h(x) \equiv h(x)$. Показана область влияния начального условия. В тех же предположениях доказана единственность решения (§ 2): любые два решения краевой задачи совпадают в некоторой области, примыкающей к отрезку $[g_0, h_0]$ оси ординат. Эта область указывается; она зависит, вообще говоря, и от f и от φ.

Далее (§ 3) доказана теорема единственности при более общих предположениях, основанная на лемме типа известной леммы Хаара. Здесь от φ' требуется только непрерывность, а относительно f предполагается, что существуют суммируемые на $[0, a_0]$ функции $H(x) \geqslant 0$ и $L(x) \geqslant 0$, для которых при любом фиксированном y почти для всех x для любых z_1, z_2 $(> z_1)$, q_1, q_2 имеют место неравенства:

$$f(x,\ y,\ z_2,\ q_2) - f(x,\ y,\ z_1,\ q_1) \leqslant H(x)(z_2 - z_1) + L(x)\,|q_2 - q_1|,$$
$$\leqslant H(x)(z_2 - z_1) + G^{(1)}(x)(q_2 - q_1)$$
$$(g(x) \leqslant y \leqslant g(x) + \sigma),$$
$$\leqslant H(x)(z_2 - z_1) + G^{(2)}(x)(q_2 - q_1)$$
$$(h(x) - \sigma \leqslant y \leqslant h(x))$$

где σ — некоторое положительное число, а суммируемые на $[0,\ a_0]$ функции $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ для любых x', x'' $(> x')$ удовлетворяют неравенствам

$$g(x') \leqslant g(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{(1)}(x)\,dx,$$

$$h(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{(2)}(x)\,dx \leqslant h(x').$$

Относительно z требуется непрерывность вместе с z_y по $(x,\ y)$ и абсолютная непрерывность по x. Единственность утверждается во всей области $0 \leqslant x \leqslant a_0$, $g(x) \leqslant y \leqslant h(x)$. Наконец, в § 4 доказан вариант этой же теоремы. Имеются примеры.

А. Д. Мышкис

1221. О методе сравнения гиперболических уравнений с частными производными второго порядка с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ш а р с к и й Я., В а ж е в с к и й Т., Бюл. Польск. АН, отд. 3, 1953, 1, № 1—2, 6—9

Функция $u(x_1, \ldots, x_m)$ удовлетворяет в области Ω дифференциальному неравенству

$$\left|\sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |b_j|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| + |c|\,|u| + |f|, \qquad (1)$$

причем оператор, стоящий в левой части, гиперболического типа. Граница области Ω состоит из плоских кусков S_0, S_{x_0} и некоторой $(m-1)$-мерной поверхности L. Пересечение области Ω плоскостью $x_m = x$ обозначается через S_x, часть поверхности L, ориентированной временным образом, — через L_T. Имеет место неравенство:

$$E(x) = \iint_{S_x}\left[\sum_{i,\,k=1}^{m-1} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} - a_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 + u^2\right] dx_1 \ldots dx_{m-1} \leqslant \sigma(x), \qquad (2)$$

где $\sigma(x)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = k_0(x)\,y + g(x), \qquad (3)$$

проходящее через точку $x = 0$, $y = E(0)$; функция $k_0(x) \geqslant 0$ зависит лишь от области Ω и коэффициентов неравенства (1),

$$g(x) = \iint_{S_x} f^2\,dx_1 \ldots dx_{m-1} + \int_{L_T^x}\left[\sum_{i,\,k=1}^{m-1} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\frac{\partial u}{\partial \eta_k} + u^2\right]\cos(n,\ x_m)\,ds,$$

где L_T^x — пересечение L_T плоскостью $x_m = x$, а $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ — соответствующим образом выбранные координаты на L_T. Доказательство неравенства (2) лишь намечено. Оно основывается на соотношении вида

$$E(x+h) - E(x) \leqslant k_h(x)\int_x^{x+h} E(\tau)\,d\tau + \int_x^{x+h} g(\tau)\,d\tau;$$

разделив последнее на h и перейдя к пределу при $h \to 0$, получаем:

$$\overline{D}_+ E(x) \leqslant k_0(x)\,E(x) + g(x),$$

где $\overline{D}_+$ — верхняя производная справа. Из последнего неравенства и уравнения (3) следует (2).

М. И. Вишик

1222. Задача Коши и краевая задача для линейных гиперболических уравнений в частных производных. Б ю р о (Problème de Cauchy et problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques. B u r e a u F l o r e n t), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 24—29 (франц.)

Автор продолжает результаты предыдущей работы (C. r. Acad. Sci., 1952, 284, № 8, 791—792; РЖМат, 1953, 754). Изучается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\quad u(x,\ 0) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x);$$
$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0. \qquad (1)$$

При помощи метода Фурье решение этой задачи представляется в виде

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l u_1(y)\,v_k(x)\,v_k(y)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\,t}{\sqrt{\lambda_k}}\,dy, \qquad (2)$$

где $v_k(x)$, λ_k — нормированные собственные функции и соответствующие собственные значения задачи

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + a(x)\,v + \lambda v = 0,\quad v(0) = v(l) = 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, если $x - t$ и $x + t$ содержатся внутри интервала $(0,\ l)$, то

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} R(x,\ t;\ y;\ 0)\,u_1(y)\,dy, \qquad (4)$$

где $R(x,\ t;\ y;\ \tau)$ — функция Римана.

Пусть $G(x,\ y;\ \lambda)$ есть функция Грина задачи (3), и

$$G(x,\ y;\ \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} G_r(x,\ y)\,\lambda^r,$$

$$M_n(x, y; t-\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k^n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)}{\sqrt{\lambda_k}} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(t-\tau)^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)}\, G_r(x, y),$$

$n > 0$ — целое.

Тогда решение задачи (1) представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \int_0^l M_n(x, y; t)\, u_1(y)\, dy$$

и тем самым устанавливается связь между формулами (2) и (4). Далее автор изучает функцию

$$H_s(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k^s} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}},$$

где s — комплексное число. Для $\operatorname{Re} s > 1/2$ эта функция аналитична и для $\operatorname{Re} s > p + 1/2$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^{2p} H_s(x\ y; t)}{\partial t^{2p}} = H_{s-p}(x, y; t).$$

Справедлива формула

$$H_s(x, y; t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} R(x, t; z, 0)\, \zeta_s(z, y)\, dz,$$

где

$$\zeta_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k^s},$$

если только $x - t$ и $x + t$ не выходят из интервала $(0, l)$. При $x \neq y$ $\Gamma(s)\, \zeta_s(x, y)$ — целая функция а при $x = y$ она регулярна с единственным простым полюсом в точке $s = 1/2$ и вычетом $1/2\sqrt{\pi}$. Для y, лежащего вне интервала $(x - t, x + t)$, справедливо представление

$$H_s(x, y; t) = \frac{E_1(s)}{\Gamma(s)},$$

где $E_1(s)$ — целая функция s. Если y лежит внутри интервала $(x - t, x + t)$, то

$$H_s(x, y; t) = \frac{1}{2s\Gamma(s)} R(x, y; t, 0) + \frac{E_2(s)}{\Gamma(s)},$$

причем $E_2(s)$ регулярна для $\operatorname{Re} s > -1/2$. Далее

$$H_0(x, y; t) = \begin{cases} 1/2 \cdot R(x, t; y, 0), & \text{если } x - t < y < x + t, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant y < x - t \text{ или} \\ & x + t < y \leqslant l. \end{cases}$$

В конце работы перечисляются свойства функции $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^s}$. Эта функция может быть аналитически продолжена в полуплоскость $\operatorname{Re} s > -1/2$, в которой она имеет единственный простой полюс в точке $s = 1/2$. Справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^s} = \pi^{2s} \zeta(2s) + \frac{F(s)}{\Gamma(s)},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана и $F(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$. Доказательства не приводятся. *Б. М. Левитан*

1223. О системах рекуррентных уравнений в частных производных второго порядка. Жерме (Sur des systèmes d'équations récurrentes aux dérivées partielles du second ordre. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 12, 504—513 (франц.)

При некоторых предположениях относительно данных функций доказывается существование и единственность (в достаточно малой области) решения рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial x\, \partial y} = F_\mu\left(x, y; z_\mu, z_{\mu+1}, \ldots, z_{\mu+m-1}; \right.$$

$$\left. \frac{\partial z_\mu}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_{\mu+m-1}}{\partial x}; \frac{\partial z_\mu}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial z_{\mu+m-1}}{\partial y}\right)$$

(z_μ суть вектор-функции, $\mu = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющего условиям

$$z_\mu|_{x=x_0} = \psi_\mu(y), \quad z_\mu|_{y=y_0} = \varphi_\mu(x).$$

Я. Б. Лопатинский

1224. Проблема Коши для линейных уравнений с частными производными. Пуччи (Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. Pucci Carlo), Ann. mat. pura ed appl., 1953, 35, 129—153 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i_1+\ldots+i_r+s \leqslant m} a_{i_1,\ldots,i_r,s}(t) \times$$

$$\times \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r+s} u(x_1, \ldots, x_r, t)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}\, \partial t^s} = f(x_1, \ldots, x_r, t)$$

при начальных условиях $\left.\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{t=0} = u_l(x_1, \ldots, x_r)$

($l = 0, \ldots, m-1$), в следующих предположениях: $a_{i_1,\ldots,i_r,s}(t)$ непрерывно дифференцируемы s раз при $|t| \leqslant h$, причем $a_{0,\ldots,0,m}(t) \equiv 1$. Пусть

$$\alpha^{(\nu)}_{i_1,\ldots,i_r,s} = \max_{|t| \leqslant h} \left| \frac{d^\nu}{dt^\nu} a_{i_1,\ldots,i_r,s}(t) \right|,$$

$$a(h) = \max_{j=1,\ldots,m} B, \text{ где}$$

$$B = \sqrt[j]{m \sum_{i_1+\ldots+i_r=j} \sum_{s=0}^{m-j} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \frac{h^{m-l-j}}{(m-l-j)!} \alpha^{(s-l)}_{i_1,\ldots,i_r,s}}$$

далее предполагается, что при $|t| \leqslant h$, $(x_1, \ldots, x_r) \in A$ (A — некоторая ограниченная область), f и u_l ($l = 0, \ldots, m-1$) неограниченно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_r$, причем для некоторых $\rho > ea(h)$ и $M > 0$

$$\left| \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r} \varphi}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}} \right| < M \frac{(i_1 + \ldots + i_r)!}{\rho^{i_1+\ldots+i_r}}$$

(при $\varphi = f, u_0, \ldots u_{m-1}$).

Тогда при $|t| \leqslant h, (x_1, \ldots, x_r) \in A$ существует (и при том единственное) решение задачи $u(x_1, \ldots, x_r, t)$, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}, \quad \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r+s} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r} \partial t^s}$$

($i_1, \ldots, i_r$ произвольны, $s < m$) непрерывны и для некоторых $M_1 > 0$, $\rho_1 > a(h)$

$$\left| \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}} \right| < M_1 \frac{(i_1+\ldots+i_r)!}{\rho_1^{i_1+\ldots+i_r}}.$$

Автор указывает представление решения в виде равномерно сходящегося ряда. Теорема подобного типа доказывается также для случая $h = \infty$.

Я. Б. Лопатинский

1225. О регулярной разрешимости некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Хорних (Zur regulären Lösbarkeit gewisser partieller Differentialgleichungen. Hornich Hans), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 128—130 (нем.)

Автор доказывает теорему:

Для того чтобы уравнение

$$\sum \alpha_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} =$$

$$= \sum A_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$$

(только конечное количество постоянных $\alpha_{i_1 \ldots i_n}$ отлично от нуля) имело аналитическое в окрестности нуля решение, необходимо и достаточно, чтобы для тех $j_1 \ldots j_n$, для которых $S(j_1, \ldots, j_n) = 0$, также и $A_{j_1 \ldots j_n} = 0$, а при

$$S(j_1, \ldots, j_n) \neq 0, \quad \overline{\lim} \sqrt[j_1+\ldots+j_n]{\left| \frac{A_{j_1 \ldots j_n}}{S(j_1, \ldots, j_n)} \right|} < +\infty.$$

Здесь

$$S(j_1, \ldots, j_n) = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_n} \binom{j_1}{i_1} \ldots \binom{j_n}{i_n} i_1! \ldots i_n!.$$

Я. Б. Лопатинский

1226. Получение интеграла Коши системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом вариации произвольных постоянных. Макаров А. Н., Науч. зап. Харьковск. ин-та механиз. и электрификации с. х., 1953, № 5, 269—276

Рассматривается так называемая замкнутая система m уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$p_k - f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0, \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots m.$$

Предполагая заданным полный интеграл

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, a)$$

системы (1) и применяя способ вариации произвольных постоянных, автор указывает, как построить интеграл Коши для системы (1).

Приведенный способ близко примыкает к известному классическому способу построения интеграла Коши системы (1) по ее полному интегралу.

О. А. Жаутыков

1227. О нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, связанных с теорией пограничного слоя. Гёртлер (Über nicht-lineare partielle Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus. Görtler Henry), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 116—120 (нем.)

Доклад, содержащий краткое описание некоторых методов приближенного решения известной краевой задачи из теории стационарного пограничного слоя, а также сообщение о проводимом исследовании краевой задачи для системы

$$uu_x + vu_y = f(x, u, u_y, u_{yy}), \quad u_x + v_y = 0,$$

где f как функция четвертого аргумента монотонно возрастает, а по третьему аргументу удовлетворяет условию Липшица (см. Görtler H., Z. angew. Math. und Mech., 1950, **30**, 265—267).

В. И. Левин

1228. О главных решениях уравнения гиперболического типа. Капилевич М. Б., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 4, 719—722

В плоской области $D(y > x > 0)$ через точки $A(x_0, x_0)$, $B(y_0, y_0)$ проведены характеристики уравнения

$$z_{xy} - f(y-x)(z_y - z_x) = 0,$$

где

$$f(y-x) = -\frac{1}{2\sqrt{K}} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x}, \quad \sqrt{K(y-x)} =$$

$$= b_1 (y-x)^{1/3} + b_3 (y-x)^{3/3} + b_5 (y-x)^{5/3} + \ldots,$$

$b_1, b_3, b_5, \ldots$ — постоянные.

Область D делится этими характеристиками на шесть областей:

$$1\,(x_0 < y_0 < x < y),\ 2\,(x < x_0 < y_0 < y),$$
$$3\,(x < y < x_0 < y_0),\ 4\,(x_0 < x < y_0 < y),$$
$$5\,(x < x_0 < y < y_0),\ 6\,(x_0 < x < y < y_0).$$

Построены так называемые главные решения, которые дают возможность непрерывно продолжить функции Римана этого уравнения из областей 4, 5 в области 2, 6 соответственно. Эти же решения позволяют выяснить возможность продолжения фундаментальных решений из областей 4, 5 в области 1, 3 соответственно.

Приведены также формулы обращения интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода, которые являются простейшими обобщениями уравнения Абеля.

А. В. Бицадзе

1229. О решении одной задачи для уравнения параболического типа. Швец М. Е., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 243—244

Решается задача:

$$\frac{\partial}{\partial z} z^{\sigma} \frac{\partial q}{\partial z} + A_1(x)\, z^{\sigma} \frac{\partial q}{\partial z} = B_1(x)\, z^{\sigma-1} \frac{\partial q}{\partial x};$$

$$\left(\frac{1}{2} < \sigma < 1\right) \quad q(0, z) = 0;\ q(x, 0) = 1,\ q(x, \infty) = 0.$$

Заменой переменных $z = [\xi(1-\sigma)]^{\frac{1}{1-\sigma}}$ уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + A(x)\, \xi^{\beta} \frac{\partial q}{\partial \xi} = B(x)\, \xi^{\beta-1} \frac{\partial q}{\partial x}, \qquad (1)$$

$A(x) = A_1(x)(1-\sigma)^{\beta}$; $B(x) = B_1(1-\sigma)^{\beta-1}$; $\beta = \frac{\sigma}{1-\sigma}$.

Решение задачи дается формулой

$$q(x, z) = 1 - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\eta^{1+\beta}}{(1+\beta)^2}\right) \right\} \Big/ \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1+\beta}, \infty\right) \right\},$$

где $\Gamma(s, y) = \int_0^y x^{s-1} e^{-x}\, dx$;

$$\eta = \xi \left[e^{-F(x)} \int_0^x \frac{e^{F(y)}}{B(y)}\, dy \right]^{-\frac{1}{1+\beta}},$$

$$F(x) = (1+\beta) \int_0^x \frac{A(y)}{B(y)}\, dy.$$

Далее предполагается, что $\beta A = \frac{dB}{dx}$, и строится решение уравнения (1), соответствующее точечному мгновенно действующему источнику:

$$q = \frac{E}{2\Gamma(\beta/(1+\beta), \infty)} (1+\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \times$$

$$\times \left(\int_0^x B^{1/\beta}\, dx \right)^{-\beta/(1+\beta)} \exp\left\{ -\frac{\eta^{\beta+1}}{(1+\beta)^2} \right\}.$$

В работе имеются опечатки.

С. Д. Эйдельман

1230. Замечания к так называемой задаче Тиссо об отображении. Й о н а с (Bemerkungen zu dem nach Tissot benannten Abbildungsproblem. J o n a s H a n s), Math. Nachr., 1954, **11**, № 3, 187—189 (нем.)

Коркиным было показано, что систему

$$x_u y_v - x_v y_u = 1,\ x_u x_v + y_u y_v = 0 \qquad (1)$$

можно привести к телеграфному уравнению

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta \qquad (2)$$

(Korkine A., Math. Ann., 1890, **35**, 588—604). Истолковывая систему (1) геометрически, имеем задачу Тиссо.

Автор новым и более простым путем выражает решение системы (1) при помощи решения уравнения (2). *Э. Я. Риекстыньш*

1231. Об одном уравнении с частными производными третьего порядка. М а н д (Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. M e n d e s M.), Ann. Fac. Univ. Toulouse, sci. math. et sci. phys., 1953, **17**, cep. 4, 97—137 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d(y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, z)\, u = 0. \qquad (1)$$

В первой части статьи уравнение (1) изучается при помощи величин d, $H = ad - g$, которые инвариантны относительно преобразования

$$u = \lambda(x)\, U \qquad (2)$$

и инвариантны в определенном смысле относительно некоторых других преобразований.

Доказывается, что только преобразование (2) и преобразования

$$\xi = \xi(x),\ \eta = \eta(y),\ \zeta = \zeta(z)$$

сохраняют вид уравнения (1).

Во второй части ищутся величины α, β, γ, δ, ε, β', ε', для которых уравнение (1), умноженное на некоторый множитель $\mu(x, y, z)$, приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \delta \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon u \right) - \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon' u \right) = 0.$$

В третьей части рассматриваются некоторые граничные задачи для уравнения (1), например:

З а д а ч а II. Найти решение, удовлетворяющее условиям $u|_{x=x_0} = f_1(y, z)$, $u|_{y=y_0} = f_2(z, x)$, $u|_{z=z_0} = f_3(x, y)$.

З а д а ч а IV. Найти решение, принимающее вместе с частными производными первого и второго порядков заданные значения на заданной поверхности.

З а д а ч а V. Найти решение, равное на цилиндре $y = f(x)$ заданной функции.

Устанавливаются условия, при которых интеграл

$$U = \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha)\, u(x, y, z, \alpha)\, d\alpha,$$

где $\theta(x, y, z)$ и $f(\alpha)$ — произвольны, $u(x, y, z, \alpha)$ — частное решение, представляет собой решение уравнения (1), удовлетворяющее определенным условиям. *З. И. Халилов*

1232. Об одной теореме типа Гамильтона — Якоби. А р ж а н ы х И. С., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 3, 463—466

Для динамических систем, описываемых уравнениями

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = \widetilde{Q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где

$$H = -L + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu,$$

$$\widetilde{Q}_\nu = Q_\nu\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right),$$

доказывается следующая теорема.

Построим дифференциальное уравнение

$$F\left(q_1, \ldots, q_n, v, \frac{\partial v}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial q_n}\right) = 0 \qquad (2)$$

при помощи исключения импульсов $p_1, \ldots, p_n$ из системы

$$H = v, \ \widetilde{Q}_\nu = \frac{\partial v}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Пусть $v(q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_n)$ есть полный интеграл уравнения (2) такой, что

$$(\widetilde{Q}_\nu, \widetilde{Q}_\mu) + \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial q_\mu \partial q_\lambda} - \frac{\partial \widetilde{Q}_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial q_\nu \partial q_\lambda}\right) = 0. \qquad (3)$$

Вычислим из уравнений $\widetilde{Q}_\nu = \partial v / \partial q_\nu$ импульсы и составим дифференциальную форму

$$\omega(d) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dq_\nu. \qquad (4)$$

Форма (4) есть точный дифференциал ($\omega = dw$). Интегралами системы (1) будут зависимости

$$p_\nu = \frac{\partial w}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

а для получения остальных интегралов системы (1) необходимо выполнить интеграцию уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial c_\nu} = \frac{\partial v}{\partial c_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Далее выводится достаточный критерий выполнимости условий (3) и рассматриваются два примера, иллюстрирующие теорему. *Н. А. Фуфаев*

1233. Об однозначности определения уравнения Шредингера по его спектральной функции. Березанский Ю. М., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 591—594

Впервые для дифференциальных операторов с частными производными доказывается единственность решения обратной задачи спектрального анализа.

Пусть D — совокупность всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x, y)$ ($x \geqslant 0$; $-\infty < y < \infty$), обращающихся в нуль вне некоторых конечных областей и удовлетворяющих краевому условию: $f'_x(0, y) = 0$ ($-\infty < y < \infty$). Дифференциальная операция $L[u] = -\Delta u + c(x, y)u$ порождает на D некоторый эрмитов оператор A, любое самосопряженное расширение которого имеет разложение единицы, порождаемое спектральными функциями $\theta(p, q; \lambda)$ (p, q — точки полуплоскости $x \geqslant 0$). Спектральным ядром $\tau(\alpha, \beta; \lambda)$ автор называет граничное значение спектральной функции $\theta(p, q; \lambda)$ на оси $x = 0$, $-\infty < y < \infty$:
$\tau(\alpha, \beta; \lambda) = \theta((0, \alpha), (0, \beta); \lambda)$ ($-\infty < \alpha, \beta, \lambda < \infty$). Основным результатом работы является теорема:

Пусть $\tau_1(\alpha, \beta; \lambda)$ и $\tau_2(\alpha, \beta; \lambda)$ — спектральные ядра некоторых самосопряженных расширений операторов A_1 и A_2 ($A_1[u] = -\Delta u + c_1(x, y)u$; $A_2[u] = -\Delta u + c_2(x, y)u$ для всех $u(x, y) \in D$) с кусочно-аналитическими функциями $c_1(x, y)$ и $c_2(x, y)$. Если $\tau_1(\alpha, \beta; \lambda) \equiv \tau_2(\alpha, \beta; \lambda)$ для всех α и β из некоторого интервала $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, то $c_1(x, y) \equiv c_2(x, y)$ в полуплоскости $x \geqslant 0$.

Доказательство этой теоремы базируется на интегральном представлении решения волнового уравнения $\Delta v + \partial^2 v / \partial t^2 - a(x, y, t)\gamma = f(x, y, t)$ и на теореме единственности Гольмгрена. *В. А. Марченко*

1234. Дифференцируемость решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Фридрихс (On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Friedrichs K. O.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 299—326 (англ.)

Пусть R — область точек $x = \{x^1, \ldots, x^m\}$ m-мерного пространства. На ней определены вектор-функции

$$u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_p(x)\}.$$

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L(u) = f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — определенная на R вектор-функция.

$$L(u) \equiv \sum_{\rho=0}^{r}(-1)^\rho \frac{\partial^\rho}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_\rho}} \sum_{\sigma=0}^{r} a^{\rho,\sigma}_{\mu_1 \ldots \mu_\rho;\, \nu_1 \ldots \nu_\sigma} \frac{\partial^\sigma u}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_\sigma}}.$$

При этом производится суммирование по индексам $\mu_1, \ldots, \mu_\rho = 1, 2, \ldots, m$ и индексам $\nu_1, \ldots, \nu_\sigma = 1, 2, \ldots, m$. Элементы входящих в оператор матричных функций $a^{\rho,\sigma}$ симметричны относительно $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ и $\nu_1, \ldots, \nu_\sigma$.

На матрицу a^{rr} налагается условие положительной определенности, выполняющееся, в частности, для «строго эллиптических» операторов (Вишик М. И., Докл. АН СССР, 1950, **74**, 881—884).

Функция, определенная на R, по определению, принадлежит к классам $\mathfrak{H}_k$ и C_k, если она имеет в R частные (в смысле Соболева) производные до порядка k включительно, непрерывные в случае C_k, а в случае $\mathfrak{H}_k$ интегрируемые со своими квадратами на любом компакте, принадлежащем к R.

В работе рассматривается обобщенное решение уравнения (1), для которого явно требуется только принадлежность решения к классу $\mathfrak{H}_r$. Доказывается, что если функция u является обобщенным решением уравнения (1), когда $f \in \mathfrak{H}_0$ и элементы матрицы $a^{\rho,\sigma}(x)$ имеют непрерывные производные порядка k, то $u \in \mathfrak{H}_{k+r}$.

Далее, если $k \geqslant 0$, элементы матриц $a^{\rho,\sigma}$ непрерывно дифференцируемы $k + r$ раз и $f \in \mathfrak{H}_k$, то любое обобщенное решение в слабом смысле уравнения (1) принадлежит к классу $\mathfrak{H}_{k+2r}$ и является таким образом решением в сильном смысле.

Применяя теорему вложения Соболева, автор получает, что если коэффициенты $a^{\rho,\sigma}$ обладают непрерывными производными до порядка $k + r$ и $f \in \mathfrak{H}_k$, где $k > m/2$, то любое обобщенное решение уравнения (1) есть решение в классическом смысле, т. е. имеет непрерывные частные производные до порядка $2r$ включительно.

Отметим, что результаты в этой статье по данным дифференциальным свойствам на области R функции f и коэффициентов $a^{\rho,\sigma}$ устанавливают опреде-

ленные дифференциальные свойства решения только на областях R', замыкание которых принадлежит к R.

Метод, которым пользуется автор, основан на применении специальных усредняющих операторов, которые, как отмечает автор, впервые в литературе в тех же целях рассматривались С. Л. Соболевым (Матем. сб., 1938, 4, 471—497) и применялись в работах автора (Amer. J. Math., 1939, 61, № 2, 523—544; Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 55, № 1, 132—151).

С. М. Никольский

1235. Производные непрерывных слабых решений эллиптических уравнений. Джон (Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations. John Fritz), Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 3, 327—335 (англ.)

Статья непосредственно примыкает к работе Фридрихса (реф. 1234). В ней доказывается более слабый результат, но, как отмечает автор, более элементарным методом. Этот метод основан на применении повторных усреднений функций многих переменных по сфере:

$$I(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|y|=1} u(x + ry)\, d\omega_y.$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и ω_n — площадь единичной сферы.

С. М. Никольский

1236. Почти аналитические функции ограниченного вида и граничные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Чжан Сяо-ли (张型近似解析函數與橢性偏微分方程式的解的邊界狀態。張孝禮. Approximately analytic functions of bounded type and boundary behaviour of solutions of elliptic partial differential equations. Chang Hsiao-li), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 2, 101—132 (кит., англ.)

Статья состоит из двух частей. В первой части, следуя Берсу (Bers L., Proc. Nat., Acad. Sci. U. S. A., 1950, 36 (2), 130—136), автор вводит понятие почти аналитических функций ограниченного вида и изучает некоторые свойства таких функций.

Комплексная функция $w(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ называется почти аналитической функцией в области Δ, если она: 1) непрерывна в Δ, 2) имеет непрерывные частные производные $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ везде в области Δ, за исключением множества изолированных в Δ точек и если 3) существует такая постоянная A (постоянная почти аналитичности), что

$$|w_{\bar{z}}(z)| \leqslant A\,|w(z)|, \quad w_{\bar{z}} \equiv {}^1/_2 (w_x + iw_y).$$

Оказывается, что в окрестности изолированной особой точки поведение почти аналитической функции $w(z)$ аналогично поведению аналитической функции. А именно, если z_0 — изолированная особая точка $w(z)$, то или z_0 является существенно особой точкой $w(z)$, т. е. $\lim\limits_{z \to z_0} |w(z) - \alpha| = 0$ для любого комплексного α, или существует такое целое число k, что $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{w(z)}{(z - z_0)^k} = \beta$ существует, конечен и отличен от нуля. Если $k < 0$, то, по определению, $w(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка $-k$. Функция, которая внутри области Δ не имеет других особенностей, кроме полюсов, называется мероморфной почти аналитической функцией. Мероморфная почти аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $w(z)$ называется функцией ограниченного вида, если ее характеристическая функция $T(R) = m(R, w) + N(R, w)$ (R — радиус) ограничена.

Опираясь на обобщение формулы Иенсена — Пуассона для таких функций, автор выводит следующую теорему:

Пусть $w(z)$ — мероморфная почти аналитическая функция ограниченного вида в единичном круге. Тогда $w(z) = f(z)\, e^{g(z)}$, где $g(z)$ — некоторая непрерывная в замкнутом круге функция, а $f(z)$ мероморфна в обычном смысле, ограниченного вида. Отсюда следует теорема единственности, аналогичная теореме Лузина — Привалова для аналитических функций.

В конце первой части автор указывает на существенное для дальнейшего перенесение доказанных им теорем на случай области, ограниченной гладкой кривой.

Вторая часть работы посвящена применениям полученных результатов к некоторым задачам для эллиптических уравнений следующего типа:

$$A_{11}(x, y)\, \varphi_{xx} + 2A_{12}(x, y)\, \varphi_{xy} + A_{22}(x, y)\, \varphi_{yy} + A_1(x, y)\, \varphi_x + A_2(x, y)\, \varphi_y + A_0(x, y)\, \varphi = 0. \qquad (1)$$

Если уравнение (1) задано в области D, ограниченной конечным числом замкнутых гладких контуров, причем существует открытая область D_0, содержащая замыкание D, $\bar{D} \subset D_0$, такая, что коэффициенты A уравнения (1) имеют в D_0 непрерывные производные до второго порядка включительно, то имеют место следующие утверждения:

1) Всякое решение уравнения (1), ограниченное снизу в D, обладает почти всюду на контуре области D конечными угловыми граничными значениями.

2) Если $A_0(x, y) \equiv 0$ в D, то производные φ_x, φ_y всякого решения уравнения (1) такого, что $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 < \text{const} < +\infty$, обладают почти всюду на контуре D конечными угловыми граничными значениями.

3) Если в предположениях утверждения 2) граничные значения равны 0 на множестве граничных точек положительной меры, то $\varphi = \text{const}$.

Все эти теоремы являются обобщением аналогичных теорем для аналитических функций. Кроме того, сформулировано обобщение теоремы Бляшке о нулях аналитических функций ограниченного вида. Автор статьи, повидимому, не знаком с опубликованными уже результатами И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, 31 (73), № 2, 217—314). Между тем ряд полученных автором результатов или непосредственно сформулирован в упомянутой статье И. Н. Векуа или просто следует из доказанных там теорем и из известных теорем о канонических формах эллиптических уравнений. Только первая из перечисленных теорем требует немного более сложного перехода. Необходимо отметить, что методом И. Н. Векуа эти теоремы получаются при менее ограничительных условиях на область и коэффициенты уравнений. Например, достаточно требовать спрямляемости границы, а у коэффициентов — существования первых производных, удовлетворяющих условиям Гельдера. В статье имеется несколько опечаток.

Б. В. Боярский

1237. Разложения по собственным функциям, связанные с уравнениями в частных производных. IV. Титчмарш (Eigenfunction expansions associated with partial differential equations (IV). Titchmarsh E. C.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 254—266 (англ.)

Изучается разложение по собственным функциям дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{p(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\}+$$

$$+\{\lambda s(x, y)-q(x, y)\}\varphi=0.$$

При помощи подстановки $\psi(x, y)=\{p(x, y)\}^{1/2}\varphi(x, y)$ оно сводится к виду (в новых обозначениях)

$$\Delta\psi+[\lambda s(x, y)-q(x, y)]\psi=0.$$

Поэтому можно ограничиться изучением последнего уравнения.

Функции s и q предполагаются всюду непрерывными и $s\geqslant 0$. Сначала уравнение рассматривается в квадрате $(0, \pi; 0, \pi)$, на границе квадрата $\psi=0$. При помощи метода последовательных приближений строится функция Грина для малых λ, которая продолжается аналитически на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной полуприямой. Затем строится функция Грина во всей плоскости при помощи предельного перехода, аналогичного случаю $s=1$ (Titchmarsh E. C., Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 1—27). При этом функция Грина $G(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda\neq 0$) для всей плоскости определяется как функция, удовлетворяющая трем условиям:

1) по x, y она удовлетворяет уравнению,

2) при $x=\xi$, $y=\eta$ имеет логарифмическую особенность,

3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|G(x, y; \xi, \eta; \lambda)|^2 s(x, y)\,dx\,dy<\infty.$$

Доказано, что функция Грина единственна, если

$$s(x, y)\geqslant S(r)\geqslant 0,$$

$$q(x, y)\geqslant Q(r)\geqslant \delta>0 \quad (r=\sqrt{x^2+y^2}),$$

причем $S'(r)$, $Q'(r)$ непрерывны,

$$S'(r)=O\{S(r)\},\ Q'(r)=O\{[Q(r)]^{3/2}\},$$

$Q(r)/S(r)\to\infty$ при $r\to\infty$ и

$$\int^{\infty} S(r)[Q(r)]^{-1/2}\,dr=\infty.$$

В конце работы исследуется вопрос о дискретности спектра исходного уравнения. Доказана теорема: Спектр уравнения дискретен, если $q(x, y)/s(x, y)\to\infty$ при $r\to\infty$ и существует $k>0$ такое, что $s(x, y)=O(r^k)$ при $r\to\infty$. Автор замечает, что последнее условие, повидимому, излишне и обусловлено методом доказательства. *В. М. Левитан*

1238. Об асимптотическом распределении собственных значений и собственных функций эллиптических дифференциальных операторов. Гординг (On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Gårding Lars), Math. scand., 1953, 1, № 2, 237—255 (англ.)

Пусть $a=a(x, D)$ — дифференциальный оператор вида

$$a(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha \qquad (m\geqslant 1),$$

где x — точка действительного n-мерного пространства, α — индекс дифференцирований,

$$D^\alpha=D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Коэффициенты $a_\alpha(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми в области T и оператор a эллиптичным, т. е. форма

$$a_0(x, \xi)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

положительно определена для всех $x\in T$. $H=H(S)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне компактного подмножества области S, замыкание которой содержится в T.

$$((f, g))=\int_S\sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha(x)\overline{g}_\alpha(x)\,dx,$$

$$((f, f))=\|f\|^2,\ f_\alpha=D^\alpha f,$$

$$(f, g)=\int_S f(x)\overline{g}(x)\,dx,\quad (f, f)=|f|^2.$$

Замыканием $H(S)$ по норме $\|f\|$ получается гильбертово пространство $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(S)$. Далее,

$$a(f, g)=(af, g),\ a_t(f, g)=a(f, g)+t(f, g),$$

$$((f, g))_t=((f, g))+t(f, g),\quad f, g\in\mathfrak{M}.$$

Оператор N_t определяется при помощи равенства

$$a_t(f, f')=((N_t f, f'))_t,\quad f, f', N_t f\in\mathfrak{M}.$$

Если t больше некоторого фиксированного положительного числа t_0, то существует ограниченный обратный оператор N_t^{-1}. $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0(S)$ — множество всех функций с интегрируемым квадратом на S. Уравнение $(f, f')=((M_t f, f'))_t$, $f\in\mathfrak{M}_0$, $M_t f, f'\in\mathfrak{M}$ определяет вполне непрерывный оператор M_t. Оператор $G_t=N_t^{-1}M_t$ также вполне непрерывен и называется преобразованием Грина, соответствующим оператору $a_t=a+t$.

Пусть k — целое положительное число. Оператор G_t^k определяется ядром $g_t^{(k)}(x, y)$:

$$(G_t^k f, f')=\int_{S\times S} g_t^{(k)}(x, y)f(x)\overline{f'}(y)\,dx\,dy,\quad f, f'\in H(S).$$

Это ядро при $x\neq y$ бесконечно дифференцируемо. Если $2km>n$, то оно непрерывно, и справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} t^{k-\nu}g_t^{(k)}(x, y)=\delta_{xy}(2\pi)^{-n}\int[a_0(x, \xi)+1]^{-k}d\xi, \tag{1}$$

где $\delta_{xy}=0$, если $x\neq y$, и $\delta_{xx}=1$, $\nu=n/2m$.

Если оператор a формально самосопряжен, т. е. форма (af, f) действительна для всех $f \in H$, то G_t также самосопряжен и для $2mk > n$:

$$\text{след } G_t^k = \int_S g_t^{(k)}(x, x)\, dx < \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{k-\nu} \text{ след } G_t^k = (2\pi)^{-n} \int_S dx \int [a_0(x, \xi) + 1]^{-k}\, d\xi. \quad (2)$$

Для самосопряженного a существует (одна и та же для всех G_t) полная ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, соответствующая собственным значениям $(\lambda_1 + t)^{-1}$, $(\lambda_2 + t)^{-1}, \ldots$ $(\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots)$. Если $2mk > n$, то

$$g_t^{(k)}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\varphi}_j(x)\, \varphi_j(y)\, (\lambda_j + t)^{-k},$$

$$\text{след } G_t^k = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + t)^{-k}.$$

Из асимптотических равенств (1) и (2) и тауберовой теоремы Харди—Литлвуда следуют асимптотические формулы

$$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1 \sim (2\pi)^{-n} w_a(S)\, t^{n/2m} \quad (3)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \overline{\varphi}_j(x)\, \varphi_j(y) = \delta_{xy} w_a(x) / w_a(S),$$

причем

$$w_a(x) = \int_{a_0(x,\xi)<1} d\xi, \quad w_a(S) = \int_S w_a(x)\, dx.$$

Формула (3) справедлива также и для несамосопряженных операторов a, если только λ_j заменить на $\operatorname{Re}\lambda_j$. *Б. М. Левитан*

1239. Собственные функции на римановых многообразиях. Минакшисундарам (Eigenfunctions on Riemannian manifolds. Minakshisundaram S.), J. Indian Math. Soc., 1953, 17, № 4, 159—165 (англ.)

Пусть R — компактное, связное, аналитическое риманово многообразие с метрикой

$$dr^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначим через $\triangle$ оператор Лапласа

$$\triangle u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right)$$

и через δ — параболический оператор

$$\delta u = \triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

Изучается фундаментальное решение $U(P, Q; t)$ уравнения (1). Доказывается, что

(I) $U(P, Q; t) = \sum \omega_n(P)\, \omega_n(Q)\, e^{-\lambda_n t}$, $t > 0$, (2)

где λ_n и ω_n — собственные значения и соответственно собственные функции оператора $\triangle$.

(II) Если $P \neq Q$, то для сколь угодно больших G при $t \to +0$

$$U(P, Q; t) = O(t^G). \quad (3)$$

(III) Если $P = Q$, то в окрестности точки $t = 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$U(P, P; t) \sim \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^k}\, t^{-k/2} (1 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots), \quad (4)$$

k — размерность многообразия, u_ν зависят только от P. Из (2), (3) и (4) и тауберовой теоремы Харди — Литлвуда следуют известные асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений оператора $\triangle$. *Б. М. Левитан*

1240. Исследование некоторых функций Грина и их применение в теории колебания мембраны. Плейель (A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes. Pleijel Åke), Arkiv mat., 1954, 2, № 6, 553—569 (англ.)

Пусть V — односвязная двумерная область, граница S которой является аналитической кривой, и пусть $\varphi_\nu(x)$ — собственные функции, а λ_ν — собственные значения уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (1)$$

соответствующие граничным задачам Дирихле или Неймана.

Устанавливаются некоторые оценки для регулярных частей функций Грина уравнения (1) при больших отрицательных значениях λ, соответствующих названным граничным условиям. При помощи их получаются формулы:

$$\sum_{\lambda_\nu < t} (\varphi_\nu(y))^2 \sim \frac{t}{2\pi} \quad \text{при } t \to +\infty,\ y \in S;$$

в случае граничной задачи Дирихле

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^{-z} = \frac{V}{4\pi} \frac{1}{z-1} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{a_{2\nu-1}}{\pi \left(z + \frac{2\nu-3}{2} \right)} + \chi_1(z); \quad (2)$$

в случае граничной задачи Неймана

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-z} = \frac{V}{4\pi} \frac{1}{z-1} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{a_{2\nu-1}}{\pi \left(z + \frac{2\nu-3}{2} \right)} + \chi_2(z), \quad (3)$$

где $\chi_i(z)$ — аналитические функции для $\operatorname{Re}(z) > -\frac{2k-1}{2}$, k — произвольное целое число, $a_{2\nu-1}$ — постоянные, V — площадь области,

(В (2) $a_1 = \frac{S}{8}$, $a_2 = -\frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{512} \int_S (c(s))^2\, dS$,

в (3) $a_1 = -\frac{S}{8}$, $a_2 = -\frac{1}{6}$,

$$a_3 = -\frac{7}{512} \int_S (c(s))^2\, dS,$$

S — длина границы, $c(s)$ — кривизна).

С. А. Терсенов

1241. **Фундаментальное решение уравнения** $\Delta u - \lambda\rho u = 0$. **Арзуманов Г. С.**, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 145—152

Во всей плоскости рассматривается уравнение $\Delta u - \lambda\rho u = 0$, здесь λ — постоянная, а $\rho(M)$ — положительная регулярная во всей плоскости функция точки M, имеющая на бесконечности порядок $O\left(\frac{1}{QM^{3+\varepsilon}}\right)$, где Q — начало координат и $\varepsilon > 0$.

Условия, налагаемые на функцию $\rho(M)$, не указываются более точно. Для полного обоснования рассуждений автора достаточно предположить, что функция $\rho(M)$ удовлетворяет условию Липшица в каждой конечной области.

Ставится задача о построении фундаментального решения $u(M, P)$ этого уравнения. Методом Е. Леви задача приводится к некоторому интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В случае, когда λ не является собственным значением этого интегрального уравнения, строится искомое фундаментальное решение. Без доказательства утверждается, что оно удовлетворяет следующим условиям на бесконечности

$$\varphi(M, P) = O\left(\frac{1}{MP^{\alpha}} \ln \frac{1}{MP}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(MP)} = O\left(\frac{1}{MP^{1+\beta}} \ln \frac{1}{MP}\right),$$

где P — фиксированная точка плоскости, α и β — некоторые положительные постоянные,

$$\varphi(M, P) = 2\pi u(M, P) - \ln \frac{1}{MP}.$$

Доказывается, что если $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то λ не является собственным значением интегрального уравнения.

В случае, когда λ является собственным значением интегрального уравнения, также строится некоторая функция $u(M, P)$ и утверждается, что она является фундаментальным решением данного дифференциального уравнения. Однако это утверждение автора ошибочно. *Д. М. Эйдус*

1242. **Оценки интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Пучч и** (Maggiorazione degli integrali di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Pucci Carlo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 197—199 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X) u = f(X),$$

при этом предполагается, что функции $a_{ik}(X)$, $b_i(X)$, $c(X)$ точки $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны в конечной замкнутой области D n-мерного пространства. Пусть квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(X)\lambda_i\lambda_k$ является в каждой точке области D или положительно определенной, или положительно полуопределенной; пусть, кроме того, в D имеет место неравенство $c(X) < 0$.

Без доказательства приводится теорема:

Пусть функция $u(X)$ есть решение дифференциального уравнения внутри D, удовлетворяющее на границе F области D краевому условию

$$\alpha(X)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(X) u = \gamma(X),$$

где n — внутренняя нормаль к F, функции $\alpha(X)$, $\beta(X)$, $\gamma(X)$ непрерывны на F и удовлетворяют неравенствам $\alpha(X)\beta(X) \leqslant 0$, $|\beta(X)| > 0$.

Тогда в области D имеет место неравенство

$$\min\left(\min_D \frac{f}{c}, \min_F \frac{\gamma}{\beta}\right) \leqslant u(X) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(\max_D \frac{f}{c}, \max_F \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

В случае же краевого условия $\partial u/\partial n = 0$ утверждается, что в D имеет место неравенство

$$\min_D \frac{f}{c} \leqslant u(X) \leqslant \max_D \frac{f}{c}.$$

При этом дополнительно предполагается, что ни в одной точке $X \in D$ квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(X)\lambda_i\lambda_k$ не есть тождественный нуль.

Аналогичные оценки имеются в работе О. А. Олейник (Матем. сб., 1952, **30**, № 3, 695—702).

Д. М. Эйдус

1243. **О второй предельной задаче для линейных уравнений в частных производных эллиптического и параболического типов в неограниченной области. Кшижанский** (Sur le second problème aux limites pour les équations linéaires aux derivées partielles du type elliptique et parabolique dans un domaine non borné. Krzyżański M.), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951 (1952), **A5**, 1—21 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме русс., польск.)

Рассматривается задача определения решения эллиптического уравнения

$$E(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \qquad (1)$$

в неограниченной области D, удовлетворяющего на границе S этой области условию

$$L[u] \equiv \alpha(P)\frac{du}{dl} + \beta(P) u = g \qquad (2)$$

(d/dl — дифференцирование по некоторому направлению, заданному в каждой точке S). Обозначим через D_n ограниченную область, отсекаемую от D гиперповерхностью Σ_n, находящейся на конечном расстоянии от начала координат, и пусть при $n \to \infty$ это расстояние неограниченно растет. Пусть далее σ_n — часть границы D_n, которая принадлежит Σ_n, а S_n — которая принадлежит S. Обозначим через $\Phi(P)$ функции класса $C^{(1)}$ в D, удовлетворяющие на S условию (2). Предполагается, что существует такая последовательность областей D_n и функция Φ, для которых однозначно разрешимо уравнение (1) в D_n при условиях (2) на S_n и $u(P) = \Phi(P)$ на σ_n. Пусть u_n есть решение этой задачи. Доказывается, что последовательность $\{u_n\}$ сходится к решению u задачи (1), (2),

если существует функция $H(P, k) > 0$ (k — параметр из $(0, k_0)$), дважды непрерывно дифференцируемая в D, удовлетворяющая условиям

$$E(H) \leqslant \delta(k) < 0, \quad L[H] \leqslant -\delta(k) < 0$$

и

$$\lim_{OP \to \infty} \frac{H(P, k_1)}{H(P, k_2)} = 0 \text{ для } 0 < k_1 < k_2 < k_0.$$

Задача имеет единственное решение в классе функций, подчиненных условию

$$|u(P)| \leqslant MH(P, k),$$

где M — постоянная, а $k < k_0$.

Теорема существования решения u доказана при условиях, что $|f(P)| \leqslant MH(P, \overline{k})$, $|g(P)| \leqslant MH(P, \overline{k})$, где $\overline{k} < k_0$, причем предел u не зависит от выбора вспомогательной функции Φ, лишь бы $|\Phi(P)| \leqslant MH(P, \overline{k})$.

Аналогичные теоремы существования и единственности устанавливаются для параболического уравнения

$$E[u] - \frac{\partial u}{\partial y} = f.$$

Функцию $H(p, k)$ автор конструирует эффективно в случае, когда областью служит слой $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, $-h \leqslant x_m \leqslant h$, а коэффициенты $E[u]$ удовлетворяют условиям

$$a_{mm} > \text{const} > 0, \quad b_m \geqslant 0, \quad c \leqslant 0.$$

О. А. Ладыженская

1244. Полигармонические почти периодические функции. Николеску (Funcţii poliarmonice aproape periodice. Nicolescu Miron), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 2, 273—283 (рум.; резюме русс., франц.)

Полигармоническая функция $u(x, y)$ порядка p, регулярная в полосе $(a, b) : a < y < b$, называется почти периодической (п. п.) в этой полосе, если она п. п. по x, равномерно относительно y. Доказывается, что:

1. Полигармоническая функция п. п. в полосе (a, b) равномерно ограничена и равномерно непрерывна в любой полосе $[a_1, b_1] \in (a, b)$.

2. Предел последовательности $\{u_n\}$ полигармонических п. п. в полосе (a, b) функций есть полигармоническая п. п. функция в этой же полосе.

3. Производные полигармонической п. п. в полосе (a, b) функции являются п. п. в любой полосе $[a_1, b_1] \in (a, b)$. Любая полигармоническая функция порядка p в полосе (a, b) допускает разложение

$$u = u_0 + yu_1 + \ldots + y^{p-1}u_{p-1},$$

где u_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ суть гармонические функции (гармонические составляющие). Доказывается, что если u п. п. функция и u_i ограничены в рассматриваемой полосе, то они являются также п. п. функциями во всякой внутренней полосе. Из этого получается разложение Фурье для такой полигармонической функции.

Доказана также теорема:

Пусть f и g вещественные п. п. функции с разложениями Фурье:

$$f(x) \sim A_0 + \sum (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x),$$

$$g(x) \sim A_0' + \sum (A_n' \cos \mu_n x + B_n' \sin \mu_n x).$$

Существует единственная функция $u(x, y)$, бигармоническая с ограниченными гармоническими составляющими в области $y > 0$ и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{y \to 0} y \Delta u = 0, \quad \lim_{y \to 0} u = f(x), \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = g(x).$$

Эта функция п. п. в любой полосе $(0, h)$, $0 < h < \infty$, и ее разложение Фурье имеет вид:

$$u(x, y) \sim A_0 + A_0' y + \sum (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x)(1 + \lambda_n y) e^{-\lambda_n y} + y \sum (A_n' \cos \mu_n x + B_n' \sin \mu_n x) e^{-\mu_n y}.$$

Б. М. Левитан

1245. Многозначные решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Бергман (Multivalued solutions of linear partial differential equations. Bergman Stefan), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 229—245 (англ.)

Рассматриваются многозначные решения уравнений $\Delta u + c(x, y) u = 0$ и даются разложения в бесконечные ряды решений, получаемых из формул, принадлежащих автору, и соответствующих (по этим формулам) либо рациональным, либо алгебраическим функциям комплексного переменного, причем рассматриваются случаи, когда $c(x, y)$ — целая функция, когда она имеет полярные особенности ($c(x, y)$ предполагается однозначной) и когда она имеет алгебраические особенности определенного вида.

Указываются на возможные обобщения и некоторое применение в теории дифференциальных уравнений смешанного типа. *М. Б. Гагуа*

1246. Об одной смешанной задаче Дирихле — Неймана. Читароза (Su un problema misto di Dirichlet — Neumann. Zitarosa Antonio), Atti IV Congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 257—260 (итал.)

Рассматривается двугранный угол, определяемый в цилиндрических координатах ρ, ϑ, z условиями $0 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha < 2\pi$, $\rho > 0$. Ищется гармоническая функция $u(\rho, \vartheta, z)$ по граничным условиям

$$u(\rho, 0, z) = f(\rho, z), \quad u_\vartheta(\rho, \alpha, z) = g(\rho, z),$$

где $f(\rho, z)$, $g(\rho, z)$ непрерывны при $\rho > 0$, $-\infty < z < \infty$.

Утверждается единственность решения этой задачи в классе функций C, определяемом следующими условиями:

а) $u(\rho, \vartheta, z)$ ограничена при $0 < \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2 < \infty$;

б) $\lim_{\rho \to 0} \left[u(\rho, \vartheta, z) \rho^{\pi/\alpha - \beta} \left(1 - \log \cos \frac{\pi \vartheta}{2\alpha} \right)^{-1} \right] = 0$;

в) $\lim_{\rho \to \infty} \left[u(\rho, \vartheta, z) \rho^{\pi/\alpha + \beta} \left(1 - \log \cos \frac{\pi \vartheta}{2\alpha} \right)^{-1} \right] = 0$; $\beta > 0$,

г) u_ρ суммируема по ϑ в $(0, \alpha)$ равномерно по z и ρ в (ρ_1, ρ_2), причем

$$\lim_{\rho\to 0}\left[u_\rho \rho^{\frac{\pi}{\alpha}+1}\left(1-\log\cos\frac{\pi\vartheta}{2\alpha}\right)^{-1}\right]=0,$$

д) $\lim\limits_{\rho\to\infty}\left[u_\rho \rho^{1/2}\left(1-\log\cos\frac{\pi\vartheta}{2\alpha}\right)^{-1}\right]=0.$

При этом все условия должны выполняться равномерно при $0<\vartheta<\alpha$, $-\infty<z<\infty$. Условие в) может быть несколько ослаблено за счет усиления д).

Решение задачи дается в виде

$$u(\rho, \vartheta, z)=\int\limits_{\vartheta=\alpha}\int g(\tau, s)\, G(\tau, s; \rho, \vartheta, z)\, d\tau\, ds-$$

$$-\int\limits_{\vartheta=0}\int f(\tau, s)\frac{\partial}{\partial\vartheta}G(\tau, s; \rho, \alpha-\vartheta, z)\, d\tau\, ds,$$

где $G(\tau, s; \rho, \vartheta, z)=\frac{1}{\alpha\pi}\rho^{k_0}\tau^{k_0-1}\sin k_0\vartheta\times$

$$\times\int\limits_0^\pi \sin^{2k_0}\varphi\,\omega^{2k_0-1}[\omega^{4k_0}-(\rho\tau)^{2k_0}\sin^{4k_0}\varphi]\,A^{-1}\,d\varphi,$$

$$A=[\omega^{4k_0}+(\rho\tau)^{2k_0}\sin^{4k_0}\varphi\cos 2k_0\vartheta]^2+$$
$$+(\rho\tau)^{4k_0}\sin^{8k_0}\varphi\sin^2 2k_0\vartheta,$$

$$\omega=\sqrt{(s-z)^2+\rho^2+\tau^2-2\rho\tau\cos\varphi},\ k_0=\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Для случая полупространства эта формула может быть проверена. Доказательства для общего случая в работе отсутствуют. *Н. С. Ландкоф*

1247. Новый метод решения задачи Дирихле для эллипсоида. Гицциетти (Nuovo metodo di risoluzione del problema di Dirichlet per l'ellissoide. Ghizzetti Aldo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 108 — 114 (итал.)

Область E, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$, надрезанная по фокальному эллипсу E' $\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}\leqslant 1$, гомеоморфно отображается на сферический слой S в пространстве (X, Y, Z), определяемый условиями $\rho_0\leqslant\rho\leqslant 1$, где $\rho_0=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$. Для этого в S вводятся ортогональные координаты

$$X=\rho\sqrt{1-h^2\cos^2\theta}\ \cos\varphi,$$

$$Y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ Z=\rho\cos\theta\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi},$$

где $h^2=\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$, $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$, $h^2+k^2=1$;

в E вводятся координаты ρ', θ', φ' формулами

$$x=p(\rho')\sqrt{1-h^2\cos^2\theta'}\cos\varphi',$$

$$y=\sqrt{h^2p^2(\rho')+k^2q^2(\rho')}\sin\theta'\sin\varphi',$$

$$z=q(\rho')\cos\theta'\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi'},$$

где $p(\rho')=\frac{a+c}{2}\rho'+\frac{a-c}{2}\frac{1}{\rho'}$,

$$q(\rho')=\frac{a+c}{2}\rho'-\frac{a-c}{2}\frac{1}{\rho'};$$

соответствующими считаются точки, для которых $\rho=\rho'$, $\theta=\theta'$, $\varphi=\varphi'$.

Преобразованная функция $u(\rho, \theta, \varphi)$ должна на сфере $\rho=1$ принимать данные значения $f(\theta, \varphi)$, а на сфере $\rho=\rho_0$ при замене θ на $\pi-\theta$ $u(\rho, \theta, \varphi)$ не меняется, а u'_ρ меняет знак. Учитывая это, а также преобразованное уравнение Лапласа, можно свести определение обобщенных коэффициентов Фурье

$$a(\rho)=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}u(\rho, \theta, \varphi)\,U(\theta, \varphi)\,d\omega,$$

($U(\theta, \varphi)$ — функция Ламэ, выраженная в координатах θ, φ, а $d\omega$ элемент телесного угла в тех же координатах) к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка при краевых условиях, однозначно определяющих это решение.

В заключение приводится теорема о среднем:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}f(\theta, \varphi)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{E'}\frac{u(x, y, 0)\,dxdy}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)-(b^2-c^2)x^2-(a^2-c^2)y^2}}.$$

Н. С. Ландкоф

1248. Интегральная формула к граничной задаче Неймана для кругового кольца. Комацу (Integralformel betreffend Neumannsche Randwertaufgabe für einen Kreisring. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Sem. Repts, 1953, № 2, 37—40 (нем.)

Используя формулу Вилля, дающую решение задачи Дирихле для кругового кольца (см., например, Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, М.— Л., 1948, гл. 10, § 53), автор получает формулу для решения задачи Неймана в случае кругового кольца. *Г. Ф. Манджавидзе*

1249. Теорема о среднем для некоторых уравнений эллиптического типа. Трикоми (Un teorema di media per certe equazioni di tipo ellittico. Tricomi Francesco G.), Rend. seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 350—353 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение эллиптического типа

$$\Delta_2 z+a(x, y)\,z_x+b(x, y)\,z_y+c(x, y)\,z=f(x, y)$$
$$(\Delta_2 z\equiv z_{xx}+z_{yy}).$$

При помощи формулы Грина доказывается формула

$$2\pi z(\zeta, \eta)=\int\limits_\gamma z\frac{dU}{dn}\,ds-$$

$$-C\iint\limits_D(c-a_x-b_y)\,zdxdy+\iint\limits_D(C-U)\,fdxdy,$$

где $U(x, y; \zeta, \eta)$ — фундаментальное решение сопряженного уравнения, имеющее логарифмическую особенность в точке (ζ, η); D — область, ограниченная кривой γ, на которой $U = C$; z — регулярное в области D решение исходного уравнения.

Г. Ф. Манджавидзе

1250. **О распространении операционного исчисления на краевые задачи. Рашевский** (Asupra extinderii calculului operational la problemele la limită. Raşevski P. C.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1954, 7, № 2, 50—65 (рум.)

Перевод статьи из журнала «Успехи матем. наук» (РЖМат, 1954, 2151).

1251. **О разрывах производных потенциала двойного слоя. Манакорда** (Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di doppio strato. Manacorda Tristano), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 516—525 (итал.)

Вычисляются скачки производных третьего порядка потенциала двойного слоя

$$W = \int_{\Sigma} \mu \mathbf{N} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\, d\Sigma$$

при пересечении носителя слоя Σ при условиях достаточной гладкости Σ и плотности μ. Поведение производных третьего порядка (так же как и второго) оказывается зависящим от геометрических характеристик поверхности Σ в окрестности рассматриваемой точки. Если через единичный вектор нормали $\mathbf{N}$ в рассматриваемой точке P провести две взаимно перпендикулярные плоскости и обозначить через u и v длины дуг линий пересечений этих плоскостей с Σ, а через A_u и T_u, соответственно A_v и T_v, — вторые кривизны и геодезические кручения этих линий в точке P, то скачки в точке P производных $\partial^3 W/\partial n^3$, $\partial^3 W/\partial u^3$ выразятся следующими формулами:

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial n^3}\right] = 4\pi \left\{\Delta\mu \operatorname{div} \mathbf{N} + \operatorname{grad}\mu \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{N} + 2\left(A_u \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + A_v \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + 2T_u \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}\right)\right\},$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial u^3}\right] = 4\pi \left\{\frac{\partial^3 \mu}{\partial u^3} - 2A_u \left(A_u \frac{\partial \mu}{\partial u} - T_v \frac{\partial \mu}{\partial v}\right)\right\}.$$

Выведены также формулы для смешанных производных третьего порядка.

В. И. Левин

1252. **Асимптотическое решение уравнения, встречающегося в теории рассеяния. Эрскин, Ситон** (The asymptotic solution of an equation occurring in scattering theory. Erskine G. A., Seaton M. J.), Proc. Phys. Soc., 1953, A66, № 1, 123—124 (англ.)

См. РЖФиз, 1954, 2247.

1253 К. **Избранные труды по механике и математике.** 468 стр., Гостехиздат, М., 1954, 14 р. 60 к.

В сборнике помещены основные классические работы С. А. Чаплыгина по аэродинамике, теоретической механике и математике. Из работ по математике включены четыре статьи, объединенные под общим названием «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений».

Помещена статья акад. М. В. Келдыша, дающая обстоятельный обзор научной и общественной деятельности С. А. Чаплыгина. В конце приведены список всех печатных работ С. А. Чаплыгина и некоторые краткие примечания к его работам, сделанные редакционной коллегией.

М. К. Керимов

1254 РЕЦ. **Математическая физика. Мензел** (Mathematical physics. Menzel Donald H., 408 + VII p., Prentice-Hall, New York, 1953 11.35 doll.) [**Рецензия:** Де-Вор (De Vore Lloyd T.), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 12, 1804 (англ.)]

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

1255. **Вывод уравнений Бельтрами — Мичелла из вариационного уравнения Кастильяно. Клюшников В. Д.,** Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 250—252

Для изотропного упругого тела выводятся условия совместности с помощью вариационной задачи на условный экстремум: вариационный принцип Кастильяно и дифференциальные уравнения равновесия Коши. Множители Лагранжа определяются уравнениями

$$2(X_x - \sigma Y_y - \sigma Z_z) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \ldots$$

$$4(1+\sigma) Y_z = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \ldots$$

Если исключить λ_k, то получаются условия совместности. Указание на возможность такого вывода имеется в книге Р. Куранта и Д. Гильберта (Методы математической физики, Гостехиздат, М., 1951, т. I).

И. С. Аржаных

1256. **Десять интегралов уравнений движения в механике специальной теории относительности. Зайлер** (Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen in der Mechanik der speziellen Relativitätstheorie. Sailer Herbert), Acta phys. austriaca, 1953, 7, № 2, 155—163 (нем.)

Указан простой метод получения десяти первых интегралов уравнений движения замкнутой системы n материальных точек в специальной теории относительности при помощи бесконечно малых преобразований группы Лоренца.

Предполагается, что действующие между частицами силы центральны и обладают потенциалом. Уравнение движения системы в этом случае имеет вид

$$m_k \frac{d^2 \mathfrak{R}_k}{d\tau^2} = -\operatorname{Grad}_k \Phi(R_1, \ldots, R_n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где m_k — масса покоя k-й частицы; τ — собственное время; $\mathfrak{R}_k$ — 4-вектор, определяющий положение частицы в пространстве-времени; R_{ik} — расстояние между i-й и k-й частицами.

$\Phi(R_1, \ldots, R_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} \varphi(R_{ik})$; φ — потенциал сил.

Бесконечно малые ортогональные преобразования вида

$$\delta x_i' = \sum_{k=1}^{4} \varepsilon_{ik} x_k + \delta\xi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$, $\delta x_i' = x_i' - x_i$, а $\delta\xi_i$ — бесконечно малый параллельный перенос, переводят систему с одной траектории $\Re_k(\tau)$ на другую, бесконечно близкую $\Re_k(\tau) + \delta\Re_k(\tau)$, причем вариация $\delta\Re_k$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$m_k \frac{d^2\delta\Re_k}{d\tau^2} = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Grad}_k \mathrm{Grad}_i \Phi \cdot \delta\Re_i.$$

Пусть $\delta\Re_k$ и $\delta\Re_k'$ суть два решения этого уравнения. Если умножить уравнение для $\delta\Re_k$ на $\delta\Re'$, а уравнение для $\delta\Re_k'$ на $\delta\Re_k$ и вычесть первое уравнение из второго, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\delta\Re_k' \frac{d^2\delta\Re_k}{d\tau^2} - \delta\Re_k \frac{d^2\delta\Re_k'}{d\tau^2}\right) = 0,$$

откуда вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\delta\Re' \frac{d\delta\Re_k}{d\tau} - \delta\Re_k \frac{d\delta\Re_k'}{d\tau}\right) = \mathrm{const},$$

связывающее $\delta\Re_k$ и $\delta\Re_k'$; это выражение является интегралом уравнений движения.

При преобразованиях частного вида из этой формулы получаются все десять интегралов уравнений движения: именно, при преобразованиях переноса $\delta x'^{l} = \delta\xi_l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ — законы сохранения трех компонент импульса и закон сохранения энергии; при преобразованиях вращения в пространстве

$\delta x_i' = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} x_k$ $(i = 1, 2, 3)$, $\delta x_4 = 0$ — три закона сохранения компонент момента количества движения; при вращениях $\delta x_i' = \varepsilon_{i4} x^4$ $(i = 1, 2, 3)$, $\delta x_4' = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{4k} x_k$ — закон сохранения движения центра тяжести.

В. А. Г.

1257. Уравнения движения для голономных неконсервативных систем с линейным интегралом. Шульгин М. Ф., Докл. АН УзССР, 1953, № 9, 7—12

Ставится задача о построении новых уравнений движения, заменяющих уравнения Лагранжа (1). С этой целью вводятся дополнительные неизвестные u_k и указываются для их определения уравнения (7). В дальнейшем система (7) приводится к виду (19), а уравнения Лагранжа отбрасываются. Кроме того, выводятся равенства (11), которые также определяют неизвестные u_k. Отбросив уравнения движения (1), автор называет соотношения (19) новыми уравнениями движения, а соотношения (11) — связями, не замечая, что соотношения (19) в силу равенств (11) являются тождествами. Следовательно, в работе отбрасываются уравнения движения, а предлагаются взамен тождественные равенства. Поэтому работа является ошибочной.

Следует отметить лишь предложение (8), показывающее, как из первого интеграла первоначальной системы можно получить первый интеграл расширенной системы.

И. С. Аржаных, В. В. Добранравов

1258. Об одном новом методе выделения из общей задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки интегрируемых случаев движения; новый частный случай движения. Мясников П. В., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 3, 47—55

Указан метод выделения из названной общей задачи частных интегрируемых случаев, т. е. такого выбора параметров задачи и начальных условий, чтобы имел место новый линейный интеграл. Сущность предлагаемого метода состоит в том, чтобы рассмотреть все возможные следствия из интеграла

$$Apx_0 + Bqy_0 + Crz_0 = \mathrm{const} \qquad (1)$$

(A, B, C — моменты инерции, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести в подвижных осях), который существует, если центр тяжести постоянно лежит в плоскости, определяемой вектором угловой скорости и кинетическим моментом относительно неподвижной точки. Анализ различных частных случаев осуществления интеграла (1) приводит к случаям Лагранжа — Пуассона, Млодзеевского, Гесса — Аппельрота и другим. Получен также новый частный случай движения, когда проекция угловой скорости p постоянно равна нулю, а проекции q и r выражаются специальным образом через эллиптическую функцию времени. Условия возможности полученного решения следующие: $B = C$, $x_0 = 0$, а вектор угловой скорости в начальный момент времени направлен по линии пересечения горизонтальной плоскости и главной плоскости инерции, в которой постоянно лежит угловая скорость, перпендикулярно к прямой, соединяющей центр тяжести с неподвижной точкой. Библиография, 12 названий.

И. С. Аржаных

1259. Формулы для определения амплитудно-фазовой характеристики линейной системы по ее кривой переходного процесса. Розоноэр Л. И., Браверман Э. М., Левин В. И., Букштейн Р. И., Сб. статей Науч. студ. о-ва Моск. энерг. ин-та, 1953, 158—166

Задано обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $D_1(p)x_1 = D_2(p)x_2$ ($p = d/dt$, D_1 и D_2 — многочлены). Амплитудно-фазовой характеристикой линейной динамической системы, описываемой этим уравнением, называется функция мнимого аргумента $\Phi(i\omega) = \frac{\Phi_1(i\omega)}{\Phi_2(i\omega)}$, где $\Phi_k(i\omega) = \int_0^\infty x_k e^{-i\omega t} dt$ — преобразование Фурье для X_k. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ известны, но многочлены D_1 и D_2 неизвестны. Требуется по графикам или таблицам функций x_1 и x_2 построить векторы $\Phi(i\omega)$ для любого $\omega > 0$. Задача

сводится к построению векторов $\Phi_k(i\omega)$. Кривая $x_k(t)$ заменяется ломаной линией, составленной либо только из вертикальных и горизонтальных, либо же из наклонных отрезков. Интегрирование по участкам приводит тогда к удобным для практических расчетов формулам, позволяющим приближенно построить векторы $\Phi_k(i\omega)$ по значениям функции x_k в дискретных точках, соответствующих точкам излома аппроксимирующей ломаной.

М. А. Айзерман

1260. **Обобщенный частотный критерий устойчивости. Цзун** (Ein verallgemeinertes Stabilitätskriterium durch die Ortskurve. Dzung L. S.), Regelungstechnik, 1953, 1, № 9, 204—206 (нем.)

Пытаясь обобщить частотный критерий устойчивости, автор естественно приходит к идее D-разбиения и «правилам штриховки», ранее подробно разработанным (Неймарк Ю. И., Автоматика и телемеханика, 1948, 9, № 3, 190—203; Устойчивость линеаризованных систем, Л., 1949). Новых результатов нет. *М. А. Айзерман*

1261. **К анализу систем с обратной связью с помощью корневых годографов. Номото** (Contribution to the root-locus analysis of the feedback control system. Nomoto Akira), Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, Sci. Council Japan, Tokio, 1953, 359—362 (англ.)

Рассматриваются системы автоматического регулирования, следящие системы и иные устройства, замкнутые обратной связью. Предполагается, что процесс описывается линейными уравнениями с постоянными коэффициентами и что при внешнем воздействии, заданном в виде импульсной функции Дирака, преобразование Лапласа для рассматриваемой координаты системы (передаточная функция системы) сводится к виду

$$\frac{KG(S)}{1+KG(S)},$$

где $G(S)$ — полином.

Предполагается далее, что известны кривые, прочерчиваемые афиксами корней знаменателя передаточной функции на комплексной плоскости (корневой годограф) при изменении $0<K<\infty$. Рассматривается задача об оценке по виду корневого годографа переходного процесса в системе. Оценки распространяются на системы с запаздыванием и с распределенными параметрами, когда G — целая функция вида

$$G=e^{-\tau S},\quad G=e^{-\sqrt{\tau S}}.$$

Вопрос о способах построения корневых годографов не рассматривается. *М. А. Айзерман*

1262. **Разрывные колебания сервосистем. Фогель** (Breaking oscillations in servo systems. Vogel Theodore), J. Mental. Sci., 1954, 100, № 418, 103—113 (англ.)

Кратко излагаются общие сведения о топологии фазовой плоскости для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения и элементарные сведения о системах, у которых движение изображающей точки на фазовой плоскости определяется не только положением ее в рассматриваемый момент, но и зависит от «истории» системы («запоминающие устройства»). Приводятся примеры фазовых портретов систем, у которых возможны разрывные автоколебания (с изменением положения изображающей точки в определенные моменты «скачком»). Автор считает, что на фазовой плоскости таких систем изображающая точка может без видимых причин (без возмущений) переходить от одного предельного цикла к другому. В обычном для кибернетики духе на протяжении всей работы проводится параллель между действием сервосистемы и психической деятельностью. *М. А. Айзерман*

1263. **О режимах работы лампового генератора. Рышков С. С.**, Докл. АН СССР, 1954, 96, № 5, 921—924

Рассматривается вопрос о существовании нескольких предельных циклов дифференциального уравнения лампового генератора

$$\ddot{x}+x=\mu\lambda(x)\dot{x}. \qquad (1)$$

Известно, что при достаточно малых μ существует предельный цикл уравнения (1), близкий к окружности $x^2+\dot{x}^2=\rho_0^2$, если при $\rho=\rho_0$ функция

$$L(\rho)=\rho\int_0^{2\pi}\lambda(\rho\cos\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi$$

обращается в нуль, меняя при этом знак. Если $\lambda(x)$ — полином, то можно выбрать коэффициенты этого полинома таким образом, чтобы уравнение $L(\rho)=0$ имело заданные простые положительные вещественные корни (Duff D., Levinson N., Quart. Appl. Math, 1952, **10**, № 2, 86—88). В реферируемой статье рассмотрены $\lambda(x)$, которые могут служить характеристиками лампового генератора. Показано, что если а) $\lambda(-x)=\lambda\ (x)=(-1)^{k-1}c$ при $a_{k-1}<x<a_k$, $k=1,\ldots,n$; $a_0=0$; $c>0$, либо б) $\lambda(x)=c_{2i+1}$ при $a_{2i}<x<a_{2i+2}$, $i=0,1,\ldots$; $\lambda(x)=0$ при $-a_1<x<0$; $\lambda(x)=-c_{2i}$ при $-a_{2i+1}<x<-a_{2i-1}$, $i=1,2,\ldots$; $a_0=0$; $0<c_1<c_2<\ldots$, то в обоих случаях можно построить возрастающую последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таким образом, чтобы функция $L(\rho)$ по крайней мере $n-1$ раз обращалась в нуль в интервале $(0, a_n)$.

И. М. Рапопорт

1264. **Приближенное решение уравнений колебательных явлений. Глава I. Свободные колебания. Дако** (Solution approchée de l'équation des phénomènes oscillatoires. Dacos F.), Bull. scient A. I. M., 1954, 67, № 1, 65—73 (франц.)

Автор изучает уравнения колебательного контура:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=f\frac{di}{dt},$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+v=fC\frac{dv}{dt},$$

где L и C (самоиндукция и емкость) постоянны, $f=a_0+a_1i+a_2i^2$ либо $f=a_0+a_1v+a_2v^2$. Ищутся решения вида $x(t)=X(t)\sin\omega t/LC$. Предлагается приближенный метод нахождения амплитуды, который подкрепляется некоторыми наводящими рассуждениями.

Оценкой погрешности автор не занимается, ограничиваясь указанием на то, что метод дает хорошие результаты в практических приложениях.

П. Д. Калафати

1265. Скрипки и радиолампы. Маркус (Violins and vacuum tubes. Markus Lawrence), Yale Scient. Mag., 1953, 28, № 3, 32—33, 35—36, 38—40 (англ.)

Решение физической задачи приведено к анализу периодического режима уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = \sin \omega t. \qquad (1)$$

После замены переменного $\tau = \frac{\pi}{2} - \omega t$ автор рассматривает вспомогательное уравнение с «малым параметром» ε

$$\omega^2 \frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = \varepsilon \cos \tau \qquad (2)$$

и, следуя методу Ляпунова и Пуанкаре (ср. Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1937), представляет решение и частоту в виде рядов по параметру ε:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \qquad (3)$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon + \omega_2 \varepsilon^2 + \ldots \qquad (4)$$

Подстановка (3) и (4) в уравнение (2) и требование периодичности решения (уничтожение резонирующих членов, ср. также применение метода Пуанкаре к уравнению Дуффинга, Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952) дает выражения для функций в (3) и констант в (4), а также и ограничения на амплитуду

$$\omega = 1 + \left(\frac{3A}{8} - \frac{1}{2A}\right)\varepsilon + \ldots \qquad (5)$$

$$x = A \cos \tau + \frac{A^2}{32}(-\cos \tau + \cos 3\tau)\,\varepsilon + \ldots \qquad (6)$$

Автор утверждает, что при $\varepsilon = 1$ формулы (5) и (6) дают результат для уравнения (1).

Вопрос об области сходимости рядов (3) и (4) и законности утверждения, что при $\varepsilon = 1$ они дают результат для уравнения Дуффинга (1), автором только ставится в конце статьи, но исследование этого вопроса не приводится. *М. И. Ельшин*

1266. Одна колебательная задача, связанная с эллиптическими интегралами первого и второго рода. Мак-Лаклан (An oscillation problem involving elliptic integrals of the first and second kinds. McLachlan N. W.), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 141—142 (англ.)

Рассматривается уравнение маятника

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \quad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Для «среднего натяжения нити», т. е. для величины

$$T_{ср} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau m(l\dot{\theta}^2 + g \cos \theta)\, dt,$$

где τ — четверть периода, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \psi = \max \theta$, автор находит явное выражение (в эллиптических интегралах) через параметры уравнения и «амплитуду» ψ. Дается также простая приближенная формула для $T_{ср}$ при малых ψ. *А. В. Драгилев*

1267. Автоколебания в существенно-нелинейных квази-консервативных системах. Савинов Г. В., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 6, 995—997

Методом малого параметра ищется первое приближение для периодического решения уравнения вида

$$\ddot{x} + g(x) = \mu f(x, \dot{x}, \mu),$$

где μ — малый параметр. Показывается, что амплитуда и частота могут быть приближенно выражены при помощи интегральных эллиптических функций.

И. Г. Малкин

1268. Влияние ветра на морское течение в бесконечном канале и в прямоугольном заливе Голдсбро (Wind effects on the motion of the sea in an infinite channel and in a rectangular gulf. Goldsbrough G. R.), Proc. Roy. Soc., 1954, A222, № 1151, 477—489 (англ.)

Рассматривается волновое движение воды под действием постоянного ветра с учетом вращения земли вокруг оси. Область движения представляет канал постоянной глубины с параллельными берегами. Движение считается двумерным; ось y направлена параллельно берегам, а ось z — вертикально вверх. Дифференциальные уравнения движения записываются в следующем виде:

$$-2\omega v = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$2\omega u = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

где u, v — компоненты скорости, ζ — подъем уровня, ω — заданная угловая скорость вращения системы вокруг земной оси, ν — коэффициент турбулентной вязкости.

В случае канала бесконечной длины дается приближенное решение указанной системы уравнений и уравнения неразрывности, удобное для числовых расчетов, при следующих граничных условиях: на берегах и на дне канала u, v обращаются в нуль, а на свободной поверхности ($z = 0$) задаются $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$. Разбирается также случай, когда канал ограничен с одной стороны плоскостью, перпендикулярной к его берегам. К вышеприведенным граничным условиям добавляется условие равенства нулю скорости на граничной плоскости; при этом приходится учитывать зависимость ζ от y, но производными u, v по x и y в уравнениях можно пренебречь. На примере Северного моря проводятся числовые расчеты, которые дают следующие результаты: 1) подъем уровня уменьшается с увеличением глубины канала; 2) влияние поперечного ветра больше, чем влияние ветра продольного направления.

Д. Е. Долидзе

1269. Об одном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории теплопроводности в пограничных слоях с профилем скоростей по Хартри. Феттис (On a differential equation occuring in the theory of heat flow in boundary layers with Hartree's velocity profiles. Fettis Henry E.), J. Aeronaut. Sci., 1954, 21, № 2, 132—133 (англ.)

Уравнение

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{2}\frac{d\theta}{d\zeta} - \varepsilon\zeta\theta = 0$$

заменой переменной $t = \frac{1}{6}\zeta^3$ приводится к уравнению вырожденной гипергеометрической функции

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(1 + \frac{2}{3t}\right)\frac{d\theta}{dt} - \frac{2\varepsilon}{3t}\theta = 0.$$

Последнее интегрируется и исследуется с физической точки зрения (θ — изменение температуры в пограничном слое по нормали к обтекаемому телу).

В. И. Левин

1270. Асимптотические решения уравнений устойчивости сжимаемой жидкости. Моравец (Asymptotic solutions of the stability equations of a compressible fluid. Morawetz Cathleen S.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 1, 1—26 (англ.)

После преобразования исходных гидродинамических уравнений к системе шести дифференциальных уравнений первого порядка рассматривается в общем виде система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^{6} \gamma_{kl}(x\lambda)\, z_l, \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \quad x \in S, \quad (1)$$

где S — некоторая окрестность начала координат в плоскости комплексного переменного x, λ — большой параметр, $\arg\lambda = \text{const}$. Предполагается, что при достаточно больших значениях $|\lambda|$ коэффициенты дифференциальных уравнений (1) являются аналитическими функциями x, регулярными в S, и допускают представление

$$\gamma_{kl}(x, \lambda) = \lambda^2 \left[\sum_{\nu=0}^{\nu_1} \gamma_{kl\nu}(x)\, \lambda^{-\nu} + E(S)\, \lambda^{-\nu_1-1}\right],$$

где $E(S)$ — функция x и λ, ограниченная в любой замкнутой подобласти S вместе со всеми своими производными по x, равномерно относительно λ.

Исследуются формальные решения системы (1)

$$z_j = \exp(\lambda Q_p(x)) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{jp\nu}(x)\, \lambda^{-\nu},$$

$$j = 1, 2, \ldots, 6, \quad p = 1, 2, \ldots, 6$$

для случая

$$Q_1 = -Q_2 = Q = \int_0^x \sqrt{b(t)}\, dt,$$

$$Q_3 = -Q_4 = R = \int_0^x \sqrt{a(t)}\, dt, \quad Q_5 = Q_6 = 0,$$

где $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) \neq 0$ и $b(x) \neq 0$ при $x \neq 0$ ($x \in S$), $a'(0) \neq 0$, $b'(0) \neq 0$, $|a'(0)| \neq |b'(0)|$.

Рассматривается сначала случай $\arg a'(0) \neq \arg b'(0)$. Вводятся в рассмотрение 12 выходящих из начала координат кривых C_{kQ}, C_{kR}, $C_{k,\,Q+R}$, $C_{k,\,Q-R}$, $k = 1, 2, 3$, на которых соответственно обращаются в нуль функции $\operatorname{Re}\lambda Q$, $\operatorname{Re}\lambda R$, $\operatorname{Re}\lambda(Q+R)$, $\operatorname{Re}\lambda(Q-R)$ (при $\arg\lambda = \text{const}$ конфигурация этих кривых не зависит от λ). Пусть C_k и S_k, $k = 1, 2, 3$ криволинейные сектора, вырезаемые в области S кривыми $C_{k,\,Q+R}$ и $C_{k,\,Q-R}$ (C_k — сектор, содержащий кривую C_{kQ}, S_k — сектор, содержащий кривую $C_{k-1,\,R}$, $C_{0R} = C_{3R}$). Доказано существование шести решений системы дифференциальных уравнений (1) $z_j = A_{jk}(x, \lambda)$ и $z_j = B_{jk}(x, \lambda)$, $k = 1, 2, 3$, допускающих асимптотические представления

$$A_{jk}(x, \lambda) = e^{\lambda Q}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu_1} f_{j1\nu}(x)\, \lambda^{-\nu} + E(S - C_k)\, \lambda^{-\nu_1-1}\right],$$

$$B_{jk}(x, \lambda) = e^{\lambda R}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu_1} f_{j3\nu}(x)\, \lambda^{-\nu} + E(S - S_k)\, \lambda^{-\nu_1-1}\right],$$

$$j = 1, 2, \ldots, 6, \quad k = 1, 2, 3,$$

где λQ берется с отрицательной вещественной частью в S_k, а λR — с отрицательной вещественной частью в C_k.

При помощи этих решений построены асимптотические представления для шести линейно независимых решений системы (1). Проанализирован также случай $\arg a'(0) = \arg b'(0)$. Возвращаясь к исходным гидродинамическим уравнениям, автор делает ряд заключений об устойчивости рассматриваемых движений сжимаемой жидкости.

И. М. Рапопорт

1271. Капиллярный обмен как функция времени. Шмидт (The time course of capillary exchange. Schmidt George W.), Bull. Math. Biophys., 1953, **15**, № 4, 477—488 (англ.)

Рассматривается упрощенная модель капиллярного обмена в организме, в которой концентрация плазмы внутри капилляра $K(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial K(z, t)}{\partial t} = -v\frac{\partial K(z, t)}{\partial z} - \frac{2k}{rf}[K(z, t) - E'(z, t)]. \quad (1)$$

Здесь v, k, r и f — некоторые физиологические постоянные, $E'(z, t)$ — концентрация у стенок капилляра. Кроме того, вводятся функции $K_m(t)$, $E'_m(t)$ и $E(t)$, являющиеся соответственно средними значениями $K(z, t)$, $E'(z, t)$ и концентрации во внешней относительно капилляра среде по длине капилляра. Между этими функциями имеют место следующие соотношения:

$$k[K_m(t) - E'_m(t)] = \frac{2Dgl}{R_0}[E'_m(t) - E(t)],$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{2rk}{a\left(R_0^2 - r^2\right)}[K_m(t) - E'_m(t)],$$

$$RT[K_m(t) - E'_m(t)] = \Delta P,$$

где все коэффициенты постоянны, а $\Delta P = \varphi(t)$ — (среднее) осмотическое давление (также неизвестное). По переменной t делается преобразование Лапласа, затем уравнение (1) усредняется по z, после чего получается нужное число уравнений для определения преобразований Лапласа искомых средних значений. *В. И. Левин*

1272. Краевая задача для аналитических решений ультрагиперболического уравнения. О у э н с (A boundary-value problem for analytic solutions of an ultrahyperbolic equation. O w e n s O. G.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 29—38 (англ.)

Рассматриваются функции $u(x, y) = u(x_1, x_2; y_1, y_2)$, определенные в области $C(X) \times C(Y)$, представляющей топологическое произведение единичных кругов $C(X)$ и $C(Y)$ на декартовых плоскостях (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно. Окружность единичного радиуса обозначается через $C^*(X)$ $(C^*(Y))$.

Вводятся три класса функций. Класс $\mathfrak{A}(X, Y^*)$ состоит из функций $u(x, y^*)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $\Delta_x^n u(x, y^*)$ и первые производные этого выражения по x_1 и x_2 непрерывны в $C(X) \times C(Y)$ при любом n; 2) $|\Delta_x^n u(x, y^*)| \leqslant 4^n \tau(n)$, где $\tau(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Здесь $\Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$; $\Delta_x^n = \Delta_x \Delta_x^{n-1}$. Поменяв ролями x и y, получим класс $\mathfrak{B}(X^*, Y)$. Класс $\mathfrak{F}(X, Y)$ состоит из функций $u(x, y)$, подчиненных условиям: 1) функция $\Delta_x^n \Delta_y^m u(x, y)$ и ее первые производные по x_i и y_i непрерывны в $C(X) \times C(Y)$ при любых n и m; 2) $|\Delta_x^n \Delta_y^m u(x, y)| \leqslant 4^{n+m} \tau(n, m)$, где $\tau(n, m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Для функций класса $\mathfrak{F}(X, Y)$ ставится краевая задача: в области $C(X) \times C(Y)$ найти интеграл уравнения

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

принимающий на $C^*(X) \times C(Y)$ заданное значение $g(x^*, y)$.

Доказывается теорема единственности:

Если $u(x, y) \in \mathfrak{F}(X, Y)$, $u(x^*, y) = 0$ и $\Delta_x u = \Delta_y u$ в $C(X) \times C(Y)$, то $u(x, y) \equiv 0$.

Доказывается также теорема существования, утверждающая, что уравнение (1) имеет интеграл из класса $\mathfrak{F}(X, Y)$, принимающий на $C^*(X) \times C(Y)$ заданное значение $g(x^*, y)$, если $g(x^*, y) \in \mathfrak{B}(X^*, Y)$ и, кроме того, $|\Delta_y^n g(x^*, y)| < c$, где c — абсолютная постоянная. Решение представляется в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_1^n(x)\, \theta_1^n(y)\, H_n(p, q; f_n, \Delta_y^{n+1} g_n, \Delta_x^{n+1} h_n).$$

Здесь $\theta_1(x)$ — интегральный оператор

$$\theta_1(x) f = \int\limits_{|p|<1} K(p, x) f(p)\, dp,$$

$K(p, x)$ — функция Грина задачи Дирихле для круга $f_n(x^*, y^*) = \Delta_y^{2n} g(x^*, y^*)$; $g_n(x^*, y) = \Delta_y^n g(x^*, y)$; функция $h_n(x, y^*)$ определяется через $g(x^*, y)$ более сложным образом.

Наконец,

$$H_n(x, y; f, \Delta_y^{n+1} g, \Delta_x^{n+1} h) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \oint\!\!\oint \frac{f(p^*, q^*)(1 - x^2)(1 - y^2)}{|p^* x|\,|q^* y|}\, dp^*\, dq^* -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|q|<1} K(q, y,)\, dq \oint \frac{\Delta_y^{n+1} g(p^*, q)(1 - x^2)}{|p^* x|}\, dp^* -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|p|<1} K(p, x)\, dp \oint \frac{\Delta_x^{n+1} h(p, q^*)(1 - y^2)}{|q^* y|}\, dq^*,$$

где dp^* и dq^* суть элементы дуг соответствующих окружностей. *С. Г. Михлин*

1273. Связь между приемом математической постановки физических задач и понятием обобщенного решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. **В а ж е в с к и й Т.**, Бюл. Польской АН, Отд. III, 1953, **1**, 3—4, 75—78

Предлагается вывод уравнения колебания струны, не требующий наличия определенного ускорения для каждой точки струны. За основной постулат, определяющий движение, берется следующий: произведение ускорения центра массы произвольного участка струны (a, b) на его массу равно векторной сумме сил натяжений, действующих на (a, b) в точках a и b. Математически это сводится к выполнению равенства $\dfrac{d^2}{dt^2} \int\limits_a^b u(t, s)\, ds = \dfrac{\partial u(t, b)}{\partial s} - \dfrac{\partial u(t, a)}{\partial s}$ для всех t, a и b.

Дается новое доказательство того, что общее решение, удовлетворяющее этому уравнению в классе C^1, имеет форму $u(t, s) = f(s + t) + g(s - t)$, где f и g суть функции из C^1. Указывается, что введенное так обобщенное решение является обобщенным решением в смысле С. Л. Соболева.

Автор ставит вопрос, необходимо ли предположение о наличии вторых производных у решения для вывода физических следствий, согласующихся с опытом.

Примечание референта. Повидимому, автор не знаком с работами Гюнтера и референта (см. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953), относящимися к этому вопросу. *О. А. Ладыженская*

1274. Движение нити накала в идеализированной вакуумной трубке под действием удара. **Т о м а с** (The motion of idealized vacuum tube filaments under shock. T h o m a s Harry S.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 11, 1341—1342 (англ.)

Автор решает при помощи преобразования Лапласа уравнение колебания струны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F,$$

где F пропорционально либо 1) единичной функции Хевисайда, либо 2) δ-функции, либо 3) производной δ-функции; ρ — линейная плотность; T — натяжение. Струна предполагается закрепленной на концах; l — ее длина.

В случае 1) решение имеет вид:

$$u = \frac{4\rho l^2}{\pi^3 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} \sin \frac{2n\pi x}{l} \left\{ 1 - \cos \frac{2n\pi \sqrt{T}}{l\sqrt{\rho}} t \right\}. \quad (1)$$

Решение в случае 2) получается почленным дифференцированием по переменной t правой части (1). Чтобы получить решение в случае 3), достаточно дважды продифференцировать правую часть (1).

Как указывает автор, имеются основания предполагать, что полученные решения хорошо описывают колебания нити накала в вакуумной трубке.

П. Д. Калафати

1275. О решении линеаризированных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Киселев А. А., Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 6, 1161—1164

Находится гидродинамическая функция тока $\psi(x_1, x_2, t)$, удовлетворяющая внутри односвязной конечной области или, в случае обтекания, во внешней области уравнению

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \Delta^2 \psi = 0$$

и начальному и граничным условиям:

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2), \quad \psi\Big|_S = \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_S = 0$$

(n — нормаль к граничному контуру S). В задаче об обтекании задается еще условие на бесконечности

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty.$$

Эта задача исследовалась раньше другими авторами с применением методов теории потенциала и интегральных уравнений. В отличие от этого в работе ψ строится с помощью разложения в ряд по собственным функциям. Причем, в случае обтекания, на ψ_0 накладываются некоторые дополнительные, практически допустимые, условия. Доказывается, что ψ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Д. Е. Долидзе

1276. Одномерное нестационарное движение газа при начальном состоянии покоя и проблема прорыва плотины. Маккн (One-dimensional unsteady motion of a gas initially at rest and the dam-break problem. Mackie A. G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 1, 131—138 (англ.)

Пусть u — скорость движения газа в направлении оси x, t — время, p — давление, ρ — плотность, c — скорость звука, $p = k\rho^\gamma$, $dp/d\rho = c^2$, k, γ — постоянные ($1 < \gamma < 3$). Уравнения движения газа имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2} c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2c}{\gamma - 1}\frac{\partial c}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Система (1) при начальных условиях $u = 0$, $c = [c(x)]_{t=0}$ в переменных $r = \frac{1}{2}u + \frac{c}{\gamma - 1}$, $s = -\frac{1}{2}u + \frac{c}{\gamma - 1}$ эквивалентна уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} + \frac{N}{r+s}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0, \\ &\left[\frac{dw}{dr}\right]_{s=r} = \left[-\frac{dw}{ds}\right]_{s=r} = \xi(r), \end{aligned} \quad (2)$$

где $N = \frac{1}{2}\frac{3-\gamma}{\gamma-1}$, $\xi(r) = [x(r)]_{t=0}$ — обращение функции $c = [c(x)]_{t=0}$ при $c = (\gamma - 1)r$.

В работе дается решение (2) в виде контурных интегралов для случая, когда $\xi(r)$ вблизи вещественной оси есть нечетная аналитическая функция. Решение совершенно аналогично решению (2) в случае, когда $\xi(r)$ есть четная аналитическая функция (Copson E. T., Proc. Roy. Soc., 1953, A216, 539—547). Далее полученное решение применяется в задаче о движении жидкости в горизонтальном русле после прорыва плотины.

Г. Н. Положий

1277. Решение одной краевой задачи из магнитогидродинамики. Нардини (Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nardini Renato), Ann. mat. pura ed appl., 1953, 35, 269—290 (итал.)

Задача о распространении магнито-гидродинамических волн в идеальной жидкости сводится к интегрированию уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\gamma}\Delta\mathbf{H} + \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \\ &\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\delta}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\delta}\operatorname{rot}(\mathbf{H} \times \mathbf{H}), \\ &\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{H}$ — магнитное поле, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, δ — плотность жидкости, μ и γ — ее магнитная проницаемость и проводимость. В случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси z, эти уравнения приводятся к одному уравнению для $H(z, t)$ — x или y-компоненте магнитного поля

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 H}{\partial t\, \partial u^2} + c\frac{\partial^2 H}{\partial u^2},$$

где $u = z\sqrt{\mu\gamma}$, $c = \frac{\mu^2\gamma}{\delta}H_z$. Скорость и давление затем выражаются через $H(z, t)$. Начальными условиями являются: $\lim_{t\to+0} H(z, t) = \lim_{t\to+0} \frac{\partial}{\partial t} H(z, t) = 0$; краевые условия: $\lim_{z\to+0} H(z, t) = G(t)$, $\lim_{z\to+\infty} H(z, t) = 0$. Задача решается операторным методом. Преобразование Лапласа $h(u, s)$ функции $H\left(\frac{u}{\sqrt{\mu z}}, t\right)$ имеет вид $h(u, s) = g(s)\exp\left(-\frac{us}{\sqrt{s+c}}\right)$, где $g(s)$ — преобразование Лапласа функции $G(t)$. Формальные преобразования приводят к решению

$$H\left(\frac{u}{\sqrt{\mu\gamma}}, t\right) = G(t) * e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n u^n}{n!} B_n(u, t), \quad (1)$$

где

$$B_0(u, t) = \psi(u, t) = \frac{u}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{4t}},$$

$$B_1(u,t)=\chi(u,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{u^2}{4t}}=\psi(u,t)*\frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

$$B_{2m}=\psi(u,t)*\frac{t^{m-1}}{(m-1)!},\ B_{2m+1}=\chi(u,t)*\frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$m=1,2,\ldots$$

Устанавливается ограниченность $B_n(u,t)$ для $n\geqslant 2$ при $u\geqslant 0$ и $0\leqslant t\leqslant T$ при сколь угодно большом T и ряд рекуррентных формул для них и их производных. На основании этих свойств доказывается сходимость ряда (1), существование свертки (1), а также проверяется, что функция (1) является решением задачи. В заключение доказывается единственность решения поставленной задачи. *В. И. Левин*

1278. Метод особенностей в физической плоскости и в плоскости годографа. Вайнштейн (The method of singularities in the physical and in the hodograph plane. Weinstein Alexander), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. IV. Fluid dynamics, 167—178, McGraw-Hill Book Co., Inc. New-York-Toronto-London, 1953, 7 doll. (англ.)

Обзор многочисленных приложений обобщенной теории осесимметрического потенциала, которую автор разработал несколько лет тому назад (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 342 — 354). Некоторые физические задачи можно интерпретировать как осесимметрические течения в пространстве, число измерений которого может быть не равным целому числу. Так задача о кручении стержней соответствует течению в пространстве 5 измерений, а уравнение Трикоми — течению в пространстве $2^1/_3$ измерений. Фундаментальное соотношение между функцией тока в пространстве n измерений и потенциалом в пространстве $n+2$ измерений, которое несомненно может быть связано с тождествами Дарбу для уравнения Эйлера — Пуассона, облегчает вычисление решений. Автор приводит различные аналитические выражения фундаментального решения (источник) и особых функций которые можно из него вывести (диполи). Даны приложения к некоторым задачам гидродинамики, которые рассматриваются как задачи обобщенной электростатики, и к некоторым задачам сверхзвуковых течений, в которых используется приближение Трикоми.

P. Germain

Перевод из Math.Revs, 1954, 15, № 2, 125.

1279. Заметка об уравнении теплопроводности. Биркгоф, Котик (Note on the heat equation. Birkhoff Garrett, Kotik Jack), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 162—167 (англ.)

Доказывается лемма: если $f(x)$ — измерима, $|f(x)|<Me^{cx^2}$, то для любого целого r интеграл

$$u_r(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}W_r(x-\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi,$$

где $W_r(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$,

является абсолютно сходящимся, причем:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x}=u_{r+1},\ \frac{\partial u_r}{\partial t}=u_{r+2}\ \text{при}\ 0<t<\frac{1}{4c}$$

и $|u_r(x,t)|\leqslant Kt^{-r/2}e^{Nx^2}$ при $0<t\leqslant t_0<\frac{1}{4c}$,

$$K=K(r,t_0),\ N=N(t_0).$$

На основании этой леммы известные свойства классического решения уравнения теплопроводности (Гурса Э., т. III, ч. 1, стр. 244—255) авторы формулируют в виде трех теорем.

Доказываются две теоремы:

Если $H(x)$ — функция с ограниченной вариацией на каждом конечном интервале и $2H(x)=H(x^+)+H(x^-)$, $H(0)=0$, $|H(x)|\leqslant Me^{cx^2}$, то несобственный интеграл

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}W_0(x-\xi,t)\,dH(\xi)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A}W_0(x-\xi,t)\,dH(\xi)$$

существует, $u(x,t)\in C^\infty$, $u_{xx}=u_t$ при $0<t<\frac{1}{4c}$;

$$|u(x,t)|<Kt^{-\frac{1}{2}}e^{Nx^2}\ \text{при}\ 0<t\leqslant t_0<\frac{1}{4c};$$

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^x u(\xi,t)\,d\xi=H(x)\ \text{для всех}\ x;$$

$$\int_0^x u(\xi,t)\,d\xi\leqslant Le^{Nx^2}$$

при $0<t\leqslant t_0<\frac{1}{4c}$, $L=L(t_0)$,

$$N=N(t_0).$$

Если $u(x,t)\in C^{(2)}$, $u_{xx}=u_t$, $H(x,t)\leqslant Ke^{Nx^2}$, где $H(x,t)=\int_0^x u(\xi,t)\,d\xi$ для всех $0<t\leqslant T$ и $H(x,t)\to 0$ при $t\to 0^+$ почти для всех x, то $u(x,t)\equiv 0$ при $0<t\leqslant T$. *Е. И. Ким*

1280. Об установившемся распределении температуры в призматическом теле полого прямоугольного сечения конечной длины. Минасян Р. С., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1953, **6**, № 5—6, 77—86 (резюме арм.)

Рассматривается призматическое тело длины l с полым прямоугольным сечением, для которого $0\leqslant x\leqslant 2b$ при $0\leqslant y\leqslant d$ и $2b_1-d\leqslant y\leqslant 2b_1$; $0\leqslant x\leqslant d_1$ и $2b-d_1\leqslant x\leqslant 2b$ при $d\leqslant y\leqslant 2b_1-d$. Определяется установившееся распределение температуры в этом теле, когда заданное распределение температуры на поверхности симметрично относительно плоскостей $x=b$, $y=b_1$. Тело разбивается на четыре равных части плоскостями $x=b$, $y=b_1$ и определяется распределение температуры в части, где $0\leqslant x\leqslant b$ при $0\leqslant y\leqslant d$ и при $0\leqslant x\leqslant d_1$ и $0\leqslant y\leqslant b_1$, причем на гранях $x=b$, $y=b_1$ тепловой поток равен нулю в силу симметрии. Решение ищется в виде рядов:

$$u(x,y,z)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{pk}(x)\sin\frac{p\pi y}{d}\sin\frac{p\pi z}{l}$$

при $d\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant d,\ 0\leqslant z\leqslant l$;

$$u(x,y,z)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{pk}(x)\sin\frac{p\pi y}{d}\sin\frac{p\pi z}{l}$$

при $0\leqslant x\leqslant d_1,\ 0\leqslant y\leqslant d,\ 0\leqslant z\leqslant l$;

$$u(x,y,z)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{pk}(y)\sin\frac{p\pi x}{d_1}\sin\frac{p\pi z}{l}$$

при $0\leqslant x\leqslant d_1,\ d\leqslant y\leqslant b_1,\ 0\leqslant z\leqslant l$.

Для определения функций $f_{pk}(x)$, $g_{pk}(x)$ и $\varphi_{pk}(y)$ используются граничные условия и условия сопряжения. *Е. И. Ким*

1281. Методы сравнения в теории дозвукового потока. Гилбарг (Comparison methods in the theory of subsonic flows. Gilbarg David), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 2, 233—251 (англ.)

В работе рассматривается дозвуковой потенциальный поток сжимаемой жидкости. Уравнение движения жидкости пишется в следующем виде:

$$\left(1-\frac{\psi_y^2}{(\rho c)^2}\right)\psi_{xx}+\frac{2\psi_x\psi_y}{(\rho c)^2}\psi_{xy}+\left(1-\frac{\psi_x^2}{(\rho c)^2}\right)\psi_{yy}=0, \quad (1)$$

где ψ — функция тока, ρ — плотность и c — скорость звука. Разность ω двух решений уравнения (1) удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a\omega_{xx}+2b\omega_{xy}+c\omega_{yy}+d\omega_x+e\omega_y=0, \quad (2)$$

откуда следует, что разность двух функций тока удовлетворяет принципу максимума, что позволяет доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть два дозвуковых потока определены в областях D и $\overline{D}$, каждый ограничен линией тока ($x=\pm\infty$), $D\subset\overline{D}$, свободные скорости на бесконечности q_0 и $\overline{q}_0$ удовлетворяют неравенству $q_0<\overline{q}_0$. Тогда, если границы имеют общую регулярную точку P, соответствующие скорости в точке P удовлетворяют неравенству

$$q(P)<\overline{q}(P).$$

Теорема 2. В дозвуковом потоке вдоль стены скорость потока в любой регулярной граничной точке есть строго возрастающая функция скорости на бесконечности.

Теорема 3. В дозвуковом потоке вдоль стены максимум скорости достигается или на границе или на бесконечности и есть строго возрастающая функция от скорости свободного потока.

Затем доказывается теорема единственности:

Пусть C — стена с равными ординатами при $x=\pm\infty$. Тогда может быть не более одного дозвукового течения вдоль C с данным числом Маха для свободного потока. В частности, симметрический поток единственным образом определяется свободным числом Маха.

Доказательство этой теоремы основывается на общем свойстве решений эллиптических уравнений в неограниченной области, сформулированном в следующем виде:

Пусть уравнение

$$L(u)=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0 \quad (3)$$

имеет непрерывные коэффициенты и эллиптично в бесконечной области D, лежащей в полуплоскости, на бесконечности коэффициенты a, b, c стремятся соответственно к пределам a_0, b_0, c_0 ($a_0c_0-b_0^2>0$), и пусть $u(x,y)$ — ограниченное в D решение, непрерывное в замыкании D. Тогда, если u имеет предел u_0 при стремлении к бесконечности вдоль границы D, то

$$\lim_{(x,y)\to\infty} u(x,y)=u_0, \qquad (x,y)\in D.$$

Полученные в первой части работы результаты для потока вдоль стенки легко переносятся на потоки в каналах. *М. М. Лаврентьев*

1282. Парадокс Даламбера и формула момента для трехмерного сверхзвукового потока. Ладфорд (D'Alembert's paradox and the moment formula in three-dimensional subsonic flow. Ludford G. S. S.), Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1953, A18, 1—13 (англ.; резюме турец.)

Автор доказывает парадокс Даламбера, находя первый член асимптотического решения дифференциального уравнения для потенциала скорости чистого сверхзвукового потока вокруг тела. Оценен также интеграл момента; результат согласуется с линеаризированной теорией. *Y. H. Kuo*

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 9, 920

1283. Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью. Лойцянский Л. Г., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, № 5, 5—14

Задача решается в приближении теории пограничного слоя. Вводятся обозначения: $v_y=v$, $v_r=u$, $v_\varphi=w$, ось y выбирается в направлении оси симметрии; уравнения пограничного слоя имеют тогда вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{w^2}{x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{uw}{x}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial(xu)}{\partial x}+\frac{\partial(xv)}{\partial y}=0,$$

граничные условия: $v=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ при $y=0$; $u=0$, $w=0$ при $y=\pm\infty$. Из уравнений выводятся «формулы сохранения»

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} xu^2dy=\int_{-\infty}^{\infty} w^2dy,$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} x^2uw\,dy=0.$$

Решение ищется при помощи разложения функции тока ψ и скорости w в ряды

$$\psi=\sqrt{\nu}\left(\overline{a}x+a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots\right),\quad w=\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x_2}+\cdots,$$

где коэффициенты зависят только от переменной $\eta = y/x\sqrt{\gamma}$. В первом приближении

$$b_1 = 0,\ \bar{a}''' + \bar{a}\,\bar{a}'' + \bar{a}'^2 = 0,\ b_2'' + \bar{a}b_2' + \bar{a}'b_2 = 0.$$

Эти уравнения имеют решения

$$\bar{a} = C_1 \operatorname{th}(C_1\eta/2),\ b_2 = C_2/\operatorname{ch}^2(C_1\eta/2).$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из «формул сохранения». Показано, что в случае турбулентной струи получается подобное же решение с другим числовым значением ν.

Задача о конической радиально-щелевой струе может быть сведена к уже рассмотренной.

Ю. Б. Румер

1284. **Слабозакрученное течение в трубе. Коллац, Гёртлер** (Rohrströmung mit schwachem Drall. Collatz Lothar, Görtler Henry), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 2, 95—110 (нем.; резюме англ.)

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в неподвижной круглой цилиндрической трубе радиуса r_0 с заданным состоянием в начальном участке ($x = 0$) и при наличии вращения жидкости вокруг оси трубы. Движение считается стационарным и симметричным относительно оси, а число Рейнольдса R_e — достаточно большим.

Благодаря внутреннему трению радиальная скорость v, вращательная скорость w и изменение давления p в радиальном направлении r должны стремиться к нулю при $x \to \infty$, поэтому из уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности вытекает, что на достаточно большом расстоянии от начального участка течение происходит по закону Пуазейля со скоростью $U(r)$ и давлением $P(x)$. Искомые компоненты скорости и давление представляются в виде:

$$u = U(r) + u^*,\ v = v^*,\ w = w^*,\ p = P(x) + p^*;$$

в уравнениях движения произведения элементов возмущенного потока отбрасываются. Для w^* получается независимое уравнение, принимающее в безразмерных переменных $s = \frac{r}{r_0}$, $q = \frac{x}{r_0 R_e}$ вид

$$s^2(1 - s^2)\,w_q^* = s^2 w_{ss}^* + s w_s^* - w^*,$$

с граничными условиями $w^* = 0$ при $s = 0$, $s = 1$; $w^* = h(s)$ при $q = 0$.

Задача решается разложением в ряд по собственным функциям:

$$w^*(q, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu q} G_\nu(s).$$

Исследование собственных значений λ_ν и собственных функций G_ν сводится к исследованию однородного интегрального уравнения

$$G(s) = \lambda \int_0^1 t(1 - t^2) H(s, t) G(t)\,dt,$$

где

$$H(s, t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - 1}{2t} s & \text{при } 0 < s \leqslant t, \\ \dfrac{s^2 - 1}{2s} t & \text{при } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказывается, что существует счетное множество отрицательных собственных значений λ_ν и соответствующих собственных функций $G_\nu(s)$, по которым можно разложить в ряд функцию $h(s)$, удовлетворяющую некоторым довольно общим дополнительным условиям.

Вычисляются значения λ_ν при $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, а также строятся графики соответствующих собственных функций. Дается пример, где начальное вращение берется по закону вращения твердого тела.

Следует заметить, что предполагаемое авторами равенство нулю поперечных компонент скорости на достаточно большом расстоянии от начального участка нельзя считать очевидным при большом значении числа Рейнольдса. *Д. Е. Долидзе*

1285. **Устойчивость движения вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами при наличии радиального температурного градиента. Чандрасекар** (The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a radial temperature gradient. Chandrasekhar S.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 2, 181—207 (англ.)

Рассматривается плоское движение вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися соосными круглыми цилиндрами. Температурный режим в жидкости считается, вообще говоря, неустановившимся. К уравнениям течения жидкости

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)U_r - \rho\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho\nu\left(\nabla^2 U_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)U_\theta + \rho\frac{U_\theta U_r}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho\nu\left(\nabla^2 U_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2}\right)$$

присоединяется уравнение распространения тепла

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)T = \varkappa\nabla^2 T$$

и «уравнение состояния» $\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta T)$; $\Delta T = T - T_0$, где ρ_0, T_0, α — постоянные. Написанные уравнения имеют стационарное решение, в котором, в частности, $U_r = 0$, $U_\theta = Ar + B/r$. Предполагается, что при этом температура зависит только от r; рассматриваются два случая:

$$\text{(I)}\ \frac{d}{dr}\Delta T_0(r) = \beta r \text{ и (II) } \frac{d}{dr}\Delta T_0(r) = \beta/r;$$

в обоих случаях $\beta = \text{const}$. Исследуется устойчивость упомянутого стационарного решения. Автор вводит возмущения скоростей и температуры и представляет их в виде $u(r)e^{i(n\theta + \sigma t)}$, $v(r)e^{i(n\theta + \sigma t)}$,

$\tau(r)\,e^{i(n\theta+\sigma t)}$. Обычным путем для u, v, τ получается система линейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями $u=v=\tau=0$ при $r=R_1$ и $r=R_2$, где R_1 и R_2 — радиусы цилиндров. В дальнейшем принимается, что цилиндры вращаются с одинаковой скоростью, так что $B=0$. Исключая v и τ и изменяя единицу длины, автор в случае I приходит к дифференциальному уравнению для функции $W=ru(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)^3 W=-\frac{n^2A^2\alpha\beta R_2^6 W}{\varkappa\nu},$$

$$W=0,\ dW/dr=0,\quad \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)^2 W=0$$

при $r=1$ и $r=\eta=R_1/R_2$. Устанавливается, что наименьшее собственное число n^2S_n этой задачи равно минимуму отношения

$$\frac{\int_{\eta}^{1} r\left[\left(\frac{dF}{dr}\right)^2+\frac{n^2F^2}{r^2}\right]dr}{\int_{\eta}^{1} rG^2\,dr},$$

где F и G связаны с W соотношениями

$$G=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)W,$$

$$F=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)W.$$

Наименьшее собственное число определяется по методу Релея – Ритца; функция F берется в виде линейной комбинации функций $C_{n,n}(\alpha_j r)$, где $C_{n,n}(z)=Y_n(\alpha\eta)\,J_n(z)-J_n(\alpha\eta)\,Y_n(z)$ и α_j — корни этой функции. Для численных расчетов положено $F=C_{n,n}(\alpha_1, r)$; эти расчеты проведены для ряда значений η и n. Особо рассмотрен случай одного цилиндра ($\eta=0$).

В случае II получается уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)^3 W=-\frac{n^2A^2\alpha\beta R_2^4 W}{\varkappa\nu r^2}.$$

В этом случае не удается свести дело к вариационной задаче. Применяя разложение по функциям Бесселя, автор получает для собственных чисел уравнение, содержащее бесконечный определитель. Для численных расчетов этот определитель заменяется своим главным минором первого или второго порядка. Как и для случая I, отдельно рассмотрено движение жидкости внутри одного цилиндра или между двумя цилиндрами. Приведены приближенные значения наименьшего собственного числа для ряда значений n и η. *С. Г. Михлин*

1286. Об установившемся движении жидкости в трубе, мало отклоняющейся от цилиндра. Хажалия Г. Я., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 465—468

В работе дается приближенный способ определения скорости на границе при осесимметричном течении несжимаемой жидкости.

В плоскости осевого сечения граничная кривая $y(x)$ предполагается мало отклоняющейся от прямой, т. е. $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и $y'''(x)$ равномерно малы относительно x. С точностью до членов второго порядка малости относительно $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ скорость потока в граничной точке представляется в виде

$$V=\frac{h}{\pi y^2}\left(1+Ay^2+Byy''+Cy''^2+Dy'^2\right),$$

где h — расход жидкости.

Из рассмотрения известных частных решений (течение от одиночного источника и случай источника-стока) для неизвестных коэффициентов получены значения: $A=0$, $B=1/4$, $C=0$, $D=1/4$.

В качестве приложения полученной формулы для скорости на границе потока рассмотрена задача об установившихся волнообразных течениях в эластичной трубе.

Предлагаемый в статье метод является обобщением результатов М. А. Лаврентьева (Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, Гостехиздат, 1946, 109—142) в аналогичной задаче для плоского потока, когда потенциал скорости $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$. В данном случае та же краевая задача решается для более сложного уравнения

$$\Delta u+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Г. И. Костычев

1287. О формулах для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы тел, погруженных в жидкость. Костюков А. А., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 225—232

Рассматривается установившееся обтекание тел, погруженных в несжимаемую тяжелую жидкость. Потенциал скоростей движения жидкости представляется в форме

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{q(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS+F(x,y,z),$$

где $q(x, y, z)$ — интенсивность источников, распределенных по поверхности тела S, а $F(x, y, z)$ — регулярная часть гармонической функции φ в области, занятой жидкостью.

На основе теорем об изменении количества движения и момента количества движения жидкости устанавливаются общие формулы для гидродинамической силы и ее момента, действующих на тело:

$$\mathbf{P}=-\rho\int_S q(\xi,\eta,\zeta)\,\operatorname{grad}F(\xi,\eta,\zeta)\,dS$$

$$\mathbf{M}_0=-\rho\int_S q(\xi,\eta,\zeta)(\mathbf{r}_0\times\operatorname{grad}F(\xi,\eta,\zeta,))\,dS$$

$$(\mathbf{r}_0=\mathbf{i}\xi+\mathbf{j}\eta+\mathbf{k}\zeta).$$

Общие формулы применяются для вычисления волнового сопротивления, подъемной силы и момента в случае тела, погруженного в поток тяжелой жидкости конечной глубины. Полученные формулы сравниваются с ранее известными, например, выражения для волнового сопротивления и подъемной силы сопоставляются с соответствующими выражениями, данными референтом (Прикл.

атем. и механика, 1945, **9**, № 3, 257—264). Приодятся конкретные выражения для сил в случае сточника, диполя и судна. *М. Д. Хаскинд*

288. Установление геострофического поля скоростей в стратифицированной жидкости. Болин (The adjustment of a non-balanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid. Bolin Bert), Tellus, 1953, **5**, № 3, 373—385 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4135.

289. Краевая задача в теории распространения пластических волн. Ли (A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation. Lee E. H.), Quart. Appl. Math., 1953, **10**, № 4, 335—346 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 326.

290. Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. Слободянский М. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 1, 55—74

Методом П. Ф. Папковича на основе теоремы М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева о равномерной аппроксимации гармонической функции рядами гармонических полиномов в предположении, что граничные поверхности гладкие в смысле А. М. Ляпунова, изучаются некоторые известные решения однородных уравнений Ляме. Не рассмотрены все несимметричные относительно декартовых координат решения, содержащиеся в формулах, установленных референтом (Докл. АН УзССР, 1950, № 3, 3—7):

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} - k\mathbf{r}\theta - l[\mathbf{r}\Omega], \quad \theta = \operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \Omega = \operatorname{rot}\mathbf{u}, \quad \nabla^2\mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

$$k = \frac{1}{2}(-1 + c(\lambda + 2\mu)),$$

$$l = \frac{1}{2}(1 - c\mu),$$

$$c = \text{const} \neq 0;$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \operatorname{grad}(\varphi - \beta(\mathbf{rB})) + \operatorname{rot}(\psi - \alpha[\mathbf{rA}]), \tag{2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{B} = \nabla^2\psi = \nabla^2\varphi = 0,$$

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{2\mu}, \quad \beta = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}.$$

Главное внимание автор уделяет двум симметричным решениям: 1) $\mathbf{A} = \psi = 0$ и 2) $\mathbf{B} = 0$, $\varphi = 0$. Дается вывод формул типа (2) и рассматривается вопрос о том, могут ли быть опущены гармоническая функция φ в первом случае и гармонический вектор ψ во втором. В первом случае получен результат П. Ф. Папковича, а во втором случае получен новый результат: решение второго типа в случае односвязной конечной области всегда можно брать без дополнительного вектора ψ. Заметим, что близкий к этому результат содержится в работе Ф. С. Чурикова (Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 6, 751—754). Однако следует указать, что в работе Ф. С. Чурикова так же, как и в указанной работе референта, вопрос о представлении вектора смещения гармоническими функциями рассматривается с других точек зрения.

Затем рассматриваются случаи бесконечной и многосвязной области. В случае бесконечной области оказывается, что решение Папковича—Гродского—Нейберга является общим. Доказательство основано на представлении гармонической функции в виде производной от некоторой другой гармонической функции. В случае двухсвязной, а затем и многосвязной области решение представлено в форме (2) ($\varphi = 0$, $\psi = 0$), причем вихревая часть этого представления несколько преобразована. Существенным результатом является тот установленный в работе факт, что для внешней части каждой из замкнутых поверхностей берется свой вектор **A**. Доказательство основано на использовании формулы Сомильяна. Заметим, что в этой части работы предположение о гладкости граничных поверхностей в смысле Ляпунова является излишним, так как существуют явные представления в форме (2) поверхностных интегралов формулы Сомильяна (Аржаных И. С., Изв. АН УзССР, 1950, № 5, 9—17; Тр. Среднеаз. ун-та, 1950, **17**, 79—95). Предположение о достаточной гладкости границ необходимо при более глубоком изучении свойств поверхностных потенциалов (там же).

Кроме решений типа (2), дан общий обзор с некоторыми замечаниями других известных решений. Решения типа Буссинеска — Галеркина Треффца и некоторые другие были рассмотрены автором в предыдущей работе (Уч. зап. МГУ, 1938, вып. 24, Механика, **2**, 181—192). Более подробно излагается вывод формулы Л. Н. Тер-Мкртичьяна (Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1947, № 4)

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \frac{\beta}{2\pi}\operatorname{grad}\int_Q \frac{\operatorname{div}\mathbf{B}}{r}\,dQ. \tag{3}$$

Следует заметить, что в формулу автора (8.3) вкралась опечатка: пропущен оператор grad.

Отметим также примечание автора об «однозначной определенности» гармонического вектора **A** общего вихревого решения в том случае, когда на границе даны смещения. Вторая граничная задача с этой точки зрения не рассмотрена. Не рассматривается также вопрос о разрешимости краевых задач для гармонических векторов при решении конкретных задач о равновесии упругого тела, например, первой и второй задачи теории упругости. *И. С. Аржаных*

1291. О применимости метода частичного преобразования Лапласа на конечном интервале интегрирования к плоской задаче теории упругости. Каприц (Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana. Capriz Gianfranco), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 401—405 (итал.)

Ставится задача об интегрировании уравнений

$$\Delta u + \sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu}f,$$

$$\Delta v + \sigma\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu}g$$

(μ и σ — упругие постоянные) в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)$ при условии, что на границе области заданы значения неизвестных u и v.

Частичным преобразованием Лапласа называется преобразование

$$u^*(x, q) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{qy} u(x, y)\, dy;\ v^*(x, q) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{qy} v(x, y)\, dy.$$

Функции $u^*(x, q)$ и $v^*(x, q)$ удовлетворяют уравнениям

$$(1+\sigma)\frac{d^2u^*}{dx^2} + q^2u^* - \sigma q\frac{dv^*}{dx} = F(x, q),$$

$$\frac{d^2v^*}{dx^2} + (1+\sigma)q^2v^* - \sigma q\frac{du^*}{dx} = G(x, q). \qquad (1)$$

(Правые части уравнений (1) содержат неизвестные слагаемые, зависящие от нормальных производных функций u и v на контуре. *Прим. реф.*)

Рассматривается однородная система (1) при нулевых значениях неизвестных на концах интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$. Собственные значения q_n параметра q определяются из уравнения $\left(\frac{2+\sigma}{\sigma}\right)^2 \sin^2 q = q^2$.

Пусть $U(x, q_n)$ и $V(x, q_n)$ — нетривиальные решения упомянутой однородной задачи. Если написать формулу Грина — Бетти для векторов смещений (u, v) и $(e^{\pm q_n y}U(x, \pm q_n), e^{\pm q_n y}V(x, \pm q_n))$, то, по утверждению автора, из полученных равенств можно найти внешние силы, действующие на границу области, после чего уже решение задачи дается известной формулой Сомильяна.

С. Г. Михлин

1292. Фундаментальный интеграл дифференциальных уравнений теории упругости анизотропного тела. Крёнер (Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. Kröner Ekkehart), Z. Physik, 1953, **136**, № 4, 402—410 (нем.)

См. РЖМех, 1954, 4874.

1293. Об осесимметричной проблеме теории упругости для среды с трансверсальной изотропией. Юбанкс, Стернберг (On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy. Eubanks R. A., Sternberg E.), J. Rational Mach. and Analysis, 1954, **3**, № 1, 89—101 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4871.

1294. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Ишлинский А. Ю., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 2, 140—146

Отмечается, что доказательство известной теоремы Кирхгофа о единственности решения основных задач теории упругости опирается на то, что граничные условия отнесены к недеформированному контуру и что учет деформации контура позволяет решать задачи об устойчивости упругих систем методами математической теории упругости. Как указывает автор, эта идея не нова; в частности, в книге В. В. Новожилова «Основы нелинейной теории упругости» (ГТТИ, 1948) уравнения упругой устойчивости строятся на основе общих нелинейных уравнений теории упругости. По сравнению с уравнениями, приведенными у В. В. Новожилова, автор пренебрегает компонентами вращения в дифференциальных уравнениях равновесия, но сохраняет их в граничных условиях.

Идея автора развивается на примере полосы $-h \leqslant y \leqslant h$, сжатой усилием p в направлении оси x; края полосы свободны от действия внешних сил. Если не учитывать деформации контура, то напряжения и смещения в полосе определяются формулами

$$\sigma_x^0 = -p,\ \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0;$$

$$u^0 = -\frac{1-\nu^2}{E}px,\ v^0 = \frac{\nu(1+\nu)}{E}py.$$

Эти величины называются основными, а разность между фактическими и основными напряжениями или смещениями — дополнительными, последние считаются достаточно малыми. Доказывается, что они удовлетворяют обычным однородным дифференциальным уравнениям теории упругости и граничным условиям

$$\tau_{xy} = -p\frac{\partial v}{\partial x},\ \sigma_y = 0;\ y = \pm h.$$

Дополнительные смещения ищутся в виде

$$u = f\left(\frac{\pi}{l}y\right)\sin\frac{\pi}{l}x,\ v = g\left(\frac{\pi}{l}y\right)\cos\frac{\pi}{l}x,$$

где l — длина полуволны возмущения границы. Для критической нагрузки получается формула

$$p_i = 2\mu\frac{\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta + \beta},$$

где λ и μ — постоянные Ляме, $\beta = \pi h/l$. Сравнение этой формулы с соответствующей формулой сопротивления материалов показывает высокую точность последней.

С. Г. Михлин

1295. К вопросу решения уравнений пологих цилиндрических оболочек. Ахундзаде М. Ю. Изв. АН АзССР, 1954, № 1, 3—13 (русс., резюме азерб.)

В работе автора (Докл. АН АзССР, 1951, № 1) уравнения В. З. Власова для пологих цилиндрических оболочек произвольного очертания приводятся к одному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$\Delta\Delta L - 4k^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{q\rho^2}{D},$$

где $\operatorname{Re} L = W$; W — перемещение по направлению нормали к средней поверхности оболочки,

$$k^2 = ik_0^2 = i\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{\ldots}},$$

D — цилиндрическая жесткость оболочки, ρ — радиус кривизны, μ — коэффициент Пуассона, a — толщина оболочки. Следуя И. Н. Векуа (Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948 г.), общее решение уравнения (1) автор представляет в виде

$$L = L_0 + \psi_1 e^{k\alpha} + \psi_2 e^{-k\alpha},$$

где L_0 — произвольное частное решение (1), а ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0.$$

Автор ищет приближенное решение краевой задачи для оболочки, для чего представляет функции Φ и Φ*, при помощи которых выражаются ψ, в виде полиномов. Так как края рассматриваемой автором оболочки жестко заделаны, коэффициенты полиномов ищутся из условия минимума средней квадратичной ошибки нормального к средней поверхности оболочки перемещения и угла поворота по всему контуру, в результате чего получается система линейных уравнений для получения искомых коэффициентов. *А. Р. Хволес*

1296. **Таблицы для приближенного расчета напряжений в цилиндрических оболочках. Окамото** (Tables for the approximate calculations of stresses in cylindrical shells. Okamoto Shunzo), Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, Sci. Council Japan, Tokio, 1953, 135—138 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4893.

1297. **Собственные колебания и узловые линии прямоугольной пластинки с четырьмя свободными сторонами. Игути** (Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. Iguchi S.), Ingr-Arch., 1953, 21, № 5-6, 303—322 (нем.)

Задача состоит в отыскании собственных чисел и собственных функций бигармонического оператора для прямоугольной области при краевых условиях

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0;$$

$$x=\pm\frac{a}{2},$$

$$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0;$$

$$y=\pm\frac{b}{2}.$$

Собственные функции ищутся в виде рядов

$$w=\sum_n X_n(\xi)\cos n\pi\left(\frac{1}{2}+\eta\right)+$$

$$+\sum_m Y_m(\eta)\cos m\pi\left(\frac{1}{2}+\xi\right),$$

где $\xi=x/a$, $\eta=y/b$, а $X_n(\xi)$ и $Y_m(\eta)$ выражаются определенным образом через гиперболические функции. Подробные вычисления проведены для квадратной пластины; изучены колебания такой пластины, симметричные и антисимметричные относительно средних линий или диагоналей квадрата. Собственные числа определяются каждый раз из уравнения, левая часть которого есть бесконечный определитель; для численного расчета автор сохраняет в нем только 4 строки и 4 столбца. Результаты вычислений сопоставляются с опытными данными. *С. Г. Михлин*

1298. **О задаче равновесия упругой пластинки с опертыми краями. Каландия А. И.**, Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1953, 19, 193—210

См. РЖМех, 1954, 3802

1299. **Об изгибе упругих пластин. III. Сенгупта** (On the bending of an elastic plate. III. Sengupta H. M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, 44, № 3, 111—123 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Дается решение задачи об изгибе тонкой эллиптической пластинки, подверженной действию нормальной силы, равномерно распределенной вдоль отрезка прямой, целиком лежащей внутри эллипса и параллельной его большой оси. Это решение может быть получено как предельный случай из более позднего результата автора (РЖМат, 1954, 3716). *С. Г. Михлин*

1300. **Изгиб диска переменной жесткости произвольной несимметричной нагрузкой. Уманский Э. С.**, Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, 12, 83—89

Рассматривается дифференциальное уравнение изгиба пластинки (в полярных координатах)

$D\Delta w$ —

$$-(1-\mu)\left\{\frac{\partial^2 D}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\}=p(r,\theta),$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

в предположении, что жесткость $D=D_0(1-k^2r^2)$, D_0, μ и k — постоянные.

Предполагая, что заданная поперечная нагрузка $p(r,\theta)$ и искомая функция $w(r,\theta)$ представимы в виде рядов Фурье, автор получает для коэффициентов $w_k(r)$ ряда $w(r,\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}w_k(r)e^{ik\theta}$ линейные неоднородные дифференциальные уравнения 4-го порядка. Общие интегралы соответствующих линейных однородных уравнений выражаются в гипергеометрических функциях. *М. Н. Олевский*

1301. **К кручению стержней. Херциг** (Zur Torsion von Stäben. Herzig Alfred), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 12, 410—428 (нем.; резюме нем., англ., франц., русс.)

В элементарной форме дается решение задачи о кручении стержня с сечением в виде полукруга, четверти круга или круга, разрезанного вдоль радиуса. Решение строится при помощи конформного преобразования. Подробнее рассмотрен случай полукруга, для которого исследована изогнутая форма сечения.

Примечание референта. В известном курсе А. Лява (Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935), приведено, со ссылкой на работу Гринхилла от 1880 г., решение в квадратурах для задачи о кручении стержня с сечением в виде кругового сектора; эти квадратуры вычислены для полукруга и четверти круга. *С. Г. Михлин*

1302. ***S*-матрица и условие причинности. I. Максвелловское поле. Кампен** (*S*-matrix and causality condition. I. Maxwell field.. Kampen N. G. van), Phys. Rev., 1953, 89, № 5, 1072—1079 (англ.)

Рассматривается задача о рассеянии (с сохранением частоты) электромагнитных волн сферически симметричным ядром конечного размера. Уравнения Максвелла $\partial\mathbf{F}/\partial t=-i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$; $\mathrm{div}\,\mathbf{F}=0$ ($\mathbf{F}=\mathbf{E}+i\mathbf{H}$) введением потенциала $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)=\left(\mathrm{rot}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{r}\,u(\mathbf{r},t)$ сводятся к волновому уравнению для $u(\mathbf{r},t)$.

Вдали от рассеивающего центра решение записывается в виде

$$u(r, \Omega, t) \sim \sum_{l,m} \frac{2Y_{lm}(\Omega)}{[2l(l+1)]^{1/2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_{lm}(k) \frac{e^{ikr}}{ikr} - (-1)^l A_{lm}(k) \frac{e^{-ikr}}{ikr} \right\} e^{-ikt} dk.$$

Благодаря сферической симметрии задачи и инвариантности при пространственных отражениях «электрические» и «магнитные» составляющие падающей волны с заданным l и m рассеиваются независимо. Опуская индексы, имеем для «электрической» составляющей

$$B^l(k) = S_1(k) A^l(k) + S_2(k) A^{l*}(k)$$
$$(A = A^l + A^m;\ A(-k) = A^{l*}(k) - A^{m*}(k)).$$

Условие сохранения энергии дает: или S_1 или S_2 равно нулю.

Условие причинности состоит в следующем: если падающая (со скоростью 1) волна в точке на расстоянии r равна нулю до момента $t = -r$, то рассеянная волна на том же расстоянии равна нулю до момента $t = r$. Это означает, что $A(k)$ (и $B(k)$) являются преобразованиями Фурье функций, равных нулю на полупрямой. Тогда $A(k)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость и $\int_{-\infty}^{8} |A(k+i\gamma)|^2 dk < M$ (для $\gamma > 0$). Выбирая в соотношении

$$B(k) = S(k) A(k) \qquad (1)$$

различные A, можно убедиться, что:
1) $S(k)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость,
2) $|S(\lambda)| < 1$ для $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$,
3) в соотношении (1) участвует $A(k)$ (а не $A^*(k)$). Легко видеть далее, что

$$S(\lambda^*) = S(\lambda)^{-1} = S(-\lambda),$$

поэтому

$$S(\lambda) = \pm e^{-2i\alpha\lambda} \prod_n \frac{(\lambda - \lambda_n)(\lambda + \lambda_n^*)}{(\lambda - \lambda_n^*)(\lambda + \lambda_n)} \prod_m \frac{iL_m - \lambda}{iL_m + \lambda}$$

(выделены нули на мнимой оси).

Это разложение применяется для получения обычной формулы эффективного сечения рассеяния вблизи резонансного уровня. Обсуждается также связь условия причинности со свойствами R-функций Вигнера (Wigner E. P., Ann. Math., 1951, 53, 36—67). В последнем параграфе автор получает из аналитического представления $S(\lambda)$ интегральные соотношения между вещественной и мнимой частью $S(k)$ на действительной оси. *Э. Э. Шноль*

1303. Теорема единственности для электромагнитной волны, ведомой анизотропным слоем. Аймерих (Un teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche guidate da un guscio anisotropo. Aymerich Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 273—276 (итал.)

Для идеально проводящего цилиндрического анизотропного слоя, т. е. цилиндрической поверхности, электрическая проводимость которой отлична от нуля в каждой точке только в определенном направлении, доказывается теорема:

Электромагнитное гармоническое поле, распространяющееся вдоль идеально проводящего слоя с односвязным сечением, расположенного в бесконечной проводящей области между двумя перпендикулярными оси цилиндра плоскостями π, единственным образом определяется нормальными компонентами электрического и магнитного полей на этих плоскостях, если в бесконечности компоненты убывают как $1/r^{\alpha}$, где r — расстояние от слоя, а $\alpha > 1$.

Случай проводимости параллельной оси цилиндра не рассматривается. Доказательство ведется от противного. К разности двух возможных полей, удовлетворяющих условиям теоремы, применяется теорема Пойнтинга в области, содержащей анизотропный слой и ограниченной круговым цилиндром, основания которого являются плоскостями π. При неограниченном возрастании радиуса цилиндра интегралы по поверхности исчезают, так что справедлива формула

$$i\omega \int (\mu \mathbf{hh}^* - \varepsilon \mathbf{ee}^*)\, d\tau + \gamma \int \mathbf{ee}^*\, d\tau = 0,$$

где γ — проводимость среды. Из нее следует $\mathbf{e} \equiv \mathbf{h} \equiv 0$, что и доказывает теорему. *П. П. Бирюлин*

1304. Нестационарная дифракция акустических и электромагнитных волн от сферы. Макаров Г. И., Петрашень Г. И., Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1953, № 27, 266—301

Рассмотрены явления дифракции электромагнитной волны от проводящей сферы и акустической волны от упругой сферы. Эти задачи в математическом отношении аналогичны и приводятся к интегрированию уравнения

$$\Delta\varphi_i - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

при соблюдении на границе сферы радиуса R условий:

$$\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \rho_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r},$$

и начальных условий: $\varphi_i = \partial\varphi_i/\partial t = 0$ при $t = 0$. При этом φ_1 и φ_2 суть значения потенциала скоростей во внешней среде и во внутренности сферы соответственно, а φ_0 есть потенциал падающей волны. Эта волна задается рядом по сферическим функциям, коэффициенты которого зависят от времени и координаты r. Диффрагированные поля ищутся в виде подобных же разложений, коэффициенты которых представлены в виде некоторых контурных интегралов Меллина. Далее методом неполного разделения переменных решения строятся, как указывают авторы, «стандартным способом» (ср. Петрашень Г. И., Уч. зап. ЛГУ, 1950, сер. матем. наук, вып. № 21, 24—71). Большинство прежних работ, посвященных диффракции, трактует лишь стационарные процессы, поэтому ясно значение рецензируемой работы, в которой получены результаты по нестационарной диффракции (около шара). *В. Д. Купрадзе*

1305. Диффракция электромагнитных волн около кругового цилиндра. Имаи (Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Kreiszylinder. Imai Isao), Z. Phys., 1954, 137, № 1, 31—48 (нем.)

Рассматривается задача диффракции стационарных плоских электромагнитных волн около вполне проводящего кругового цилиндра.

В случае, когда вектор электрического поля E параллелен оси цилиндра, задача приводит к решению уравнения

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0 \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right),$$

$E_z = 0$ при $r = a$, $E_z = E_z^e = e^{ikr\cos\varphi}$ при $r \to \infty$, где a — радиус цилиндра, $e^{ikr\cos\varphi}$ — подающая волна.

Решение ищется в виде ряда

$$E_z = E_z^e + E_z^s,$$

$$E_z^s = -\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr)\cos(m\varphi),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$; ряд сходится при $ka \ll 1$.

Для вычисления решения E_z^s представляется контурным интегралом в комплексной плоскости, что дает

$$E_z^s = -\sqrt{\frac{a\sin(\varphi/2)}{2r}}\exp ik(r - 2a\sin\varphi/2) \times$$

$$\times\left\{1 - \frac{4k^2a^2\cos^2(\varphi/2) - 1}{8ikr} - \frac{i}{2ka\sin(\varphi/2)} \times \right.$$

$$\left. \times\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{\sin^2(\varphi/2)}\right)\right\} + (ka)^{1/3}\sqrt{\frac{1}{2kr}}\exp i(kr + \pi/12) \times$$

$$\times \sum_s A_s \frac{e^{i\alpha_s\varphi} + e^{i\alpha_s(2\pi-\varphi)}}{1 - e^{2\pi i\alpha_s}} \left(1 - \frac{4\alpha_s^2 - 1}{8ikr}\right),$$

где

$$A_s = 2\sqrt{3\pi}\,\frac{(3x_s)^{-1/3}J_{1/3}(x_s)}{J_{2/3}(x_s) - J_{-2/3}(x_s)} \times$$

$$\times\left\{1 + \frac{1}{30}e^{i\pi/3}\left(\frac{3x_s}{ka}\right)^{2/3} + \ldots\right\},$$

$$\alpha_s = ka\left\{1 + \frac{1}{2}e^{i\pi/3}\left(\frac{3x_s}{ka}\right)^{2/3} - \frac{1}{120}e^{i\pi/3} \times \right.$$

$$\left. \times\left(\frac{3x_s}{ka}\right)^{4/3} + \ldots\right\},$$

$$J_{1/3}(x_s) + J_{-1/3}(x_s) = 0.$$

Исследуется также случай, когда вектор магнитного поля параллелен оси цилиндра.

Приведены некоторые числовые значения для

$$x_s,\ A_s,\ \alpha_s \quad (s = 1,2).$$

Автор сравнивает свои результаты с результатами Франца и Депермана (Franz W., Depperman K., Ann. Physik, 1952, **10**, 361—373), полученными другим путем.

В конце статьи дано математическое дополнение для вычисления нулей функций Ганкеля и ее производной. *Д. З. Авазашвили*

1306. Переход сферических звуковых волн из движущейся среды в среду, движущуюся с другой скоростью и имеющую другие свойства. **Войт С. С.** Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 3, 491—493

Исследуется распространение сферических звуковых волн от неподвижного точечного источника, относительно которого движутся две среды (два полупространства), разделенные плоскостью $z = 0$. Для частного случая, когда среда, в которой находится источник, неподвижна, задача ранее рассматривалась автором (РЖМат, 1954, 4821). Задача сводится к нахождению потенциалов звуковых волн φ_1 и φ_2 для каждого полупространства, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta\varphi_1 - \beta_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + 2ik_1\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + k_1^2\varphi_1 = 0,$$

$$\Delta\varphi_2 - \beta_2^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - \beta_2^2\sin 2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y} - \beta_2^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} +$$

$$+ 2ik_2\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + 2ik_2\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + k_2^2\varphi_2 = 0$$

с граничными условиями при $z = 0$:

$$n\left(k_1\varphi_1 + i\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) =$$

$$= m\left(k_2\varphi_2 + i\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + i\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right),$$

$$n\frac{\partial}{\partial z}\left(k_1\varphi_2 + i\beta_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\varphi_1 + i\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right),$$

где k_j, β_j, n, m — физические константы, α — угол, под которым движутся среды.

Найдены выражения для потенциалов отраженных и преломленных волн. Исследуется асимптотическое поведение полученных зависимостей для областей значительно удаленных от звукового источника. *В. П. Пилатовский*

1307. Эффекты вязкого рассеивания в сферическом акустическом резонаторе. Феррис (The effects of viscous dissipation in the spherical acoustic resonator. Ferris Horace G.), J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, № 1, 47—50 (англ.)

Рассматривается задача о вязком рассеивании акустических колебаний в среде малой вязкости, заполняющей внутренность сферического резонатора. Основное дифференциальное уравнение для скорости $\mathbf{v}$ частицы колеблющейся среды получено путем очевидных исключений давления p из обычных уравнений акустики при помощи уравнений состояния и неразрывности:

$$\mu\Delta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\mu}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + c^2\rho_0\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) ищется в форме

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi + \mathbf{A}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0.$$

В силу (1) вихревой вектор $\mathbf{A}$ и потенциал φ удовлетворяют системе уравнений Гельмгольца

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \quad \Delta\varphi + k^2\varphi = 0,$$

причем $h^2 = -i\sigma/\nu$, $k^2 = \sigma^2/(c^2 + 4i\nu\sigma/3)$, где ν — кинематическая вязкость среды, c — скорость распространения звуковых волн, $\sigma = \omega + i\alpha$ — комплексная частота.

Вектор $\mathbf{v}$ находится в форме ряда, члены которого зависят от времени как $e^{i\sigma t}$. Амплитуды основных колебаний находятся при помощи сферических функций из граничных условий на внутренней поверхности резонатора (нормальная и касательная составляющая вектора $\mathbf{v}$ обращаются в нуль).

Зная реальные значения встречаемых величин, автор нашел частоты свободных колебаний, а также константы затухания, связанные с каждой частотой. Действие вязкости несколько снижает частоты свободных колебаний и вызывает явление затухания, величина которого для чисто радиальных колебаний значительно меньше, чем та же величина для колебаний, имеющих касательную составляющую вектора скорости. *В. П. Пилатовский*

1308. Явление сильного возмущения собственных электромагнитных колебаний в цилиндрических областях при незначительных нарушениях цилиндричности. Саясов Ю. С., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 2, 163—166

Изучается влияние малых деформаций боковых стенок длинных идеально проводящих цилиндрических резонаторов на их собственные электромагнитные колебания.

Пользуясь результатами Л. де Бройля (Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М., 1936) и В.А. Фока (Докл. АН СССР, 1934, **1**, № 3, 97—102, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, М., 1946), автор показывает, что возмущение поля в длинном цилиндре пропорционально не только относительному искажению боковых стенок, но содержит еще дополнительный множитель порядка квадрата отношения длины цилиндра к его поперечному размеру; когда указанное отношение достаточно велико, то малейшее искажение цилиндричности приводит к заметному возмущению поля. *Д. З. Авазашвили*

1309. Искривленный волновод. Хессельбах (Gekrümmte Hohlleiter. Hesselbach Benno), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 251—253 (нем.)

Решение уравнений Максвелла в цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками, изогнутом по окружности, приводится к решению векторной краевой задачи. Введением комплексной величины $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ уравнения Максвелла для установившихся колебаний приводятся к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{ij\omega}{c}\mathbf{F}, \qquad (1)$$

где i, j — мнимые единицы, $ij = ji$ — бикомплексное число.

Пусть x, y, z — ортогональная система координат, где y — ось, вокруг которой изгибается цилиндрический волновод, x — расстояние от оси y, $z = R\psi$, R — постоянная, а ψ — угол поворота вокруг оси y. Уравнение (1) эквивалентно тогда трем уравнениям

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{ij\omega x}{cR}F_x,$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{ij\omega x}{cR}F_y, \qquad (2)$$
$$F_z = \frac{ijcx}{\omega R}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right).$$

Если $x = x(s)$, $y = y(s)$ есть уравнения сечения волновода в плоскости $z = \text{const}$, то граничные условия имеют вид

$$E_x\frac{dx}{ds} + E_y\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0.$$

Исключив F_z, уравнения (2) можно записать как одно векторное

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = -\frac{ij}{R}\left\{\frac{j}{\omega}c\operatorname{grad}\left[(\mathbf{ar})\operatorname{rot}\mathbf{f}\right] + \frac{\omega}{c}(\mathbf{ar})\left[\mathbf{f}\right]\right\},$$

где $\mathbf{a}$ — единичный вектор оси x, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в плоскости $z = \text{const}$, $\mathbf{f} = \{f_x, f_y\} = \{F_x, F_y\}$.

Дифференцирование по z дает

$$\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial z^2} = -\frac{(\mathbf{ar})}{R^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left((\mathbf{ar})\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((\mathbf{ar})\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}\right)\right\} -$$
$$-\frac{2}{R^2}(\mathbf{ar})\operatorname{div}\mathbf{f}\cdot\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{af})}{R^2}\mathbf{a} - \left(\frac{\omega(\mathbf{ar})}{Rc}\right)^2\mathbf{f}.$$

Подстановка $\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial z^2} = \pm k^2\mathbf{f}$ приводит последнее уравнение к двумерной задаче о собственных значениях. *П. П. Бирюлин*

1310. К теории эффекта Вина в электролитических растворах. Фалькенхаген, Кельб (Zur Theorie des Wien-Effektes in elektrolytischen Lösungen. Falkenhagen H., Kelbg G.), Z. Elektrochem., 1953, **57**, № 7, 609—614 (нем.)

Теоретический анализ эффекта Вина (зависимости проводимости сильного электролита от разности потенциалов), данный Фалькенхагеном (Physik Z., 1931, **32**, 353), который считал ионы точечными, видоизменяется здесь таким образом, чтобы учесть размеры ионов. Первый метод учета приводит к системе уравнений $\Delta f + \mu\partial f/\partial x = \Delta\psi = \varkappa^2 f$, где постоянные μ и $\varkappa$ имеют определенный физический смысл. Решение этой системы ищется в виде разложения по сферическим функциям. Учет граничного условия на поверхности иона позволяет найти нужную характеристику решения в замкнутом виде, не определяя полностью этого решения. Второй метод, более полно описывающий явление, приводит к системе из шести линейных уравнений 2-го порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами. Эта система редуцируется к следующей:

$$\Delta\psi_g - \varkappa^2\psi_g + \mu\frac{\partial\psi_u}{\partial x} = 0,$$
$$\Delta\left(\Delta\psi_u + \mu\frac{\partial\psi_g}{\partial x}\right) = \frac{\varkappa^2}{2}\left(\Delta\psi_u + \mu\frac{\partial\psi_g}{\partial x}\right)$$

(с неизвестными функциями ψ_u и ψ_g). Решение, с учетом граничного условия (поставленного на поверхности сферического иона), ищется в виде суммы ряда по степеням μ^2. Приводятся первые члены этого ряда. Полученные результаты иллюстрируются

на графиках. В математическом отношении работа написана небрежно. *А. Д. Мышкис*

1311. Рекуррентные соотношения для сфероидальных волновых функций в случае вытянутого сфероида. Маркс (Recurrence relations for prolate spheroidal wave functions. Marx Imanuel), J. Math. and Phys., 1954, 32, № 4, 269—275 (англ.)

Выводятся два рекуррентных соотношения между радиальными сфероидальными волновыми функциями $R_{mn}(\xi)$ и рекуррентная формула для собственных значений λ_{mn} волнового уравнения в сфероидальных координатах ξ, η, φ, связанных с прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x = \frac{d}{2}\left(\xi^2-1\right)^{1/2}\left(1-\eta^2\right)^{1/2}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{d}{2}\left(\xi^2-1\right)^{1/2}\left(1-\eta^2\right)^{1/2}\sin\varphi,\ z = \frac{d}{2}\xi\eta.$$

Волновое уравнение в сфероидальных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]+\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+$$
$$+c^2(\xi^2-\eta^2)\psi=0.$$

Собственные колебания описываются функциями $\psi_{mn} = R_{mn}(\xi)\,S_{mn}(\eta)\,e^{im\varphi}$, где R_{mn} и S_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{dR_{mn}}{d\xi}\right]-\left(\frac{m^2}{\xi^2-1}+\lambda_{mn}-c^2\xi^2\right)R_{mn}=0.$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dS_{mn}}{d\eta}\right]-\left(\frac{m^2}{1-\eta^2}+\lambda_{mn}+c^2\eta^2\right)S_{mn}=0,$$

причем оба разложения функции $S_{mn}(\eta)$ в окрестности каждой из двух особых точек $\eta=\pm1$ должны быть свободны от логарифмов. Этому требованию можно удовлетворить только при некотором дискретном множестве значений λ_{mn} параметра λ, образующих спектр собственных значений данной краевой задачи. Функции $R_{mn}(\xi)$ определяются условием, чтобы их разложения в окрестности точки $\xi=1$ не содержали логарифмов.

Первая рекуррентная формула имеет вид:

$$b^{mn}_{m\nu}R_{m\nu}(\xi)=\xi R_{mn}(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)S'_{mn}(\eta)S_{m\nu}(\eta)}{\xi^2-\eta^2}\,d\eta+$$
$$+(\xi^2-1)R'_{mn}(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{\eta S_{mn}(\eta)S_{m\nu}(\eta)}{\xi^2-\eta^2}\,d\eta,$$

здесь $\nu-n$ — нечетное целое, постоянная $b^{mn}_{m\nu}$ может быть представлена в виде двойного интеграла, содержащего функции R_{mn}, S_{mn}, R'_{mn}, S'_{mn}, $R_{m\nu}$ и $S_{m\nu}$.

Вторая рекуррентная формула выражает $R_{m\pm1,\nu}(\xi)$ в виде линейной комбинации функций $R_{mn}(\xi)$ и $R'_{mn}(\xi)$ с интегральными коэффициентами, зависящими от $S_{m\pm1}(\nu)$, $S_{mn}(\eta)$ и $S'_{mn}(\eta)$, причем $\nu-n$ — нечетное целое число.

Наконец, третья формула имеет вид:

$$\lambda_{mn}=\lambda_{m0}+\sum_{p=1}^{n}c^m_{p,\,p-1},$$

где через $c^m_{p\nu}$ обозначены постоянные, выражающиеся через интегралы от соответствующих линейных комбинаций радиальных функций $R(\xi)$ и угловых сфероидальных функций $S(\eta)$.

Метод вывода этих рекуррентных формул основан на том, что производные $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ любого решения волнового уравнения также являются решениями этого уравнения и могут быть разложены в ряды по сфероидальным собственным функциям $\psi_{\mu\nu}(\xi,\eta,\varphi)$.

Этот метод был применен Уиттекером к двумерному волновому уравнению, имеющему в полярных координатах r, ϑ собственные функции вида $\psi_m = J_m(r)\,e^{im\vartheta} = \Psi_m(x,\ y)$, где $J_m(r)$ — функции Бесселя. Разлагая функцию

$$\frac{\partial\Psi_m}{\partial x}=J'_m(r)\cos m\vartheta\cos\vartheta+\frac{m}{r}\sin m\vartheta\sin\vartheta J_m(r)$$

в ряд по функциям ψ_μ, получаем:

$$J'_m(r)+\frac{m}{r}J_m(r)=2a_mJ_{m-1}(r);$$

$$J'_m(r)-\frac{m}{r}J_m(r)=2b_mJ_{m+1}(r),$$

где a_m и b_m — постоянные. Автор распространяет этот прием на трехмерное волновое уравнение в сфероидальных координатах. *Ю. Л. Рабинович*

См. также: 1058 К, 1148, 1325, 1393, 1394, 1473, 1474, 1483

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1312. Интегральные уравнения с суммируемыми ядрами. Платоне (Equazioni integrali a nuclei sommabili. Platone Giulio), Pont. Acad. Sci. Acta, 1953, 15, 77—92 (итал.; резюме латин.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_E A(y)k(x,y)\varphi(y)\,dy+f(x)$$

и присоединенное к нему

$$\psi(x)=\mu A(x)\int_E\psi(y)k(y,x)\,dy+g(x),$$

где E — измеримое подмножество r-мерного евклидова пространства, $f(x)$ существенно ограничена на E, $k(x,y)$, существенно ограничена на $E\times E$ и $g(x)$ и $A(x)$ интегрируемы по Лебегу на E.

Показано, что итерированный ряд сходится для

$|\lambda|<1/LM$, где $M=\int_E |A(x)|\,dx$, L — существенная верхняя грань $|k(x,y)|$ на $E\times E$.

Также, если существуют непрерывные функции $\alpha_{in}(x)$, $\beta_{in}(y)$ такие, что существенная верхняя грань

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}(x)\,\beta_{in}(y)-k(x,y)\right|\to 0 \text{ по } n,$$

то имеют место обычные не выраженные через детерминанты теоремы Фредгольма.

Очевидно, эти результаты являются частными случаями результатов для уравнений с ограниченными линейными операторами в линейном нормированном пространстве (см., например, стр. 194—196 статьи референта в Bull. Amer. Math. Soc. 1931, **37**, 185—212.) *T. H. Hildebrandt.*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 231.

1313. Об интегральном уравнении абелева типа с двумя переменными. Василаке (Asupra unei ecuații integrale de tip Abel cu două variabile. Vasilache Sergiu), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 3—4, 109—113 (рум.; резюме русс., франц.)

Известный операционный способ решения уравнения Абеля переносится на уравнение

$$\iint_0^{xy}\frac{f(s,t)\,ds\,dt}{(x-s)^{\alpha}(y-t)^{\beta}}=g(x,y),$$

где $0<\alpha,\beta<1$, $g(x,y)$ абсолютно интегрируема в (конечном или бесконечном) прямоугольнике $(0<x<a,\ 0<y<b)$. При помощи преобразования Лапласа с двумя переменными получено решение:

$$f(x,y)=\frac{\sin\alpha\pi\sin\beta\pi}{\pi^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint_{0\,0}^{xy}\frac{g(s,t)\,ds\,dt}{(x-s)^{1-\alpha}(y-t)^{1-\beta}}.$$

M. K. Фаге

1314. Достаточное условие устойчивости для систем линейных интегральных уравнений. Конти (Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari. Conti Roberto), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 72—73 (итал.)

Рассматривается система интегральных уравнений в векторной форме

$$x=x^0+\int_{t_0}^{t}\{[A(\tau)+B(\tau)]\,x+a+b(\tau)\}\,d\tau. \quad (1)$$

Предполагается, что решения редуцированной системы

$$y_\omega=\int_{t_0}^{t}\{A(\tau)\,y_\omega+a\}\,d\tau \quad (2)$$

ограничены при $t\to\infty$. Без доказательства формулируется условие, достаточное для ограниченности при $t\to\infty$ решений системы (1). Это условие заключается в совокупности ограничений, наложенных на матрицу $B(\tau)$, вектор-функцию $b(\tau)$, на решение y_ω системы (2) и на матрицу $Y(t)$ — решение матричного интегрального уравнения

$$Y(t)=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,Y(\tau)\,d\tau,$$

где I — единичная матрица. *М. А. Красносельский*

1315. О нелинейном интегральном уравнении Вольтерра. Сато (Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Satō Tokui), Compositio math., 1953, **11**, № 3, 271—290 (франц.)

Изучается уравнение

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t,u(t))\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant a+r \quad (1)$$

с $f(x)$, $K(x,t,u)$ непрерывными по совокупности переменных. Существование непрерывного решения $u(x)$ следует из принципа неподвижной точки. Единственность доказывается в предположении, что $K(x,t,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,t,u)-K(x,t,\bar u)|\leqslant\bar K(x,t,|u-\bar u|),$$

где $\bar K(x,t,0)\geqslant 0$, $\bar K(x,t,u)$ непрерывна, не убывает по u и такова, что уравнение

$$u(x)=\int_a^x\bar K(x,t,u(t))\,dt$$

имеет только тривиальное решение $u(x)\equiv 0$.

Устанавливаются также некоторые теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра, входящего в функцию K, и предела интеграции.

Далее рассматриваются системы уравнений вида

$$u_j(x=f_j(x)+\int_a^x K_j(x,t,u_1(t),\ldots,u_n(t))\,dt \quad (2)$$

$$(j=1,2,\ldots,n).$$

При некоторых предположениях переносятся понятия верхнего и нижнего интеграла на случай системы уравнений (2) и устанавливается теорема, аналогичная теореме, доказанной Кнезером для системы дифференциальных уравнений. *М. К. Фаге*

1316 К. Лекции по теории интегральных уравнений. Петровский (Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen. Petrovskij I. G., 100 S., Physica-Verlag, Würzburg, 1953, 7.80 DM), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 259 (библ.)

Перевод с русского.

1317 К. Сингулярные интегральные уравнения. Мусхелишвили (Singular integral equations. Muskhelishvili N. I., 444 pp., P. Noordhoff, Groningen-Holland, 1953, 28.50 Fl.), Schweiz. Bauzeitung, 1954, **72**, № 15, 214 (библ.)

Перевод с русского.

1318 РЕЖ. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Михлин

(Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira. M i h l i n S z. G.) [Рецензия: Ф е п ь ё (Fenyo István), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 1, 173—175 (венг.)

1319 Д. Об одном методе решения интегральных уравнений. С е р г е е в Н. П. Авторсф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1320. Об осадке жесткого штампа на упругом слое, расположенном на несжимаемом основании. Б и р м а н С. Е., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 5, 791—794

Задача рассматривается в условиях плоской деформации и при отсутствии трения.

Осадка $v(x)$ и давление $f(t)$ связаны интегральным уравнением

$$v(x) = \frac{k}{2\pi\mu}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch} 2a\zeta - 1}{\zeta(\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)}\,d\zeta\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\zeta(t-x)\,dt,$$

где a — толщина упругого слоя; $f(t) = 0$ при $|t| > b$.

Дается приближенное решение этого интегрального уравнения для штампа с плоским основанием $v(x) = v_0 + \varepsilon x$.

При отсутствии наклона $\varepsilon = 0$, давление $f(t)$ берется в виде

$$f(t) = \frac{P}{\pi b\sqrt{1-t^2}}\sum_k \beta_k \cos\gamma_k t,$$

где γ_k — заданные числа в пределах $0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1/2\pi$; β_k — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из исходного уравнения и условия равновесия

$$P = \int_{-b}^{+b} f(x)\,dx.$$

Аналогичный прием применяется и при наличии наклона $\varepsilon \neq 0$. Во всех случаях ядро $(\operatorname{ch} 2a\zeta - 1) : (\operatorname{sh} 2a\zeta + \zeta)$ аппроксимируется линейным агрегатом показательных функций:

$$g(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x + x} \approx \sum_i s_i e^{-r_i x}$$

(в формуле (5) имеется опечатка: $\operatorname{sh} x + 1$ вместо $\operatorname{sh} x + x$). Этим путем найдены соотношения

$$\frac{2\pi\mu v_0}{kP} \approx 0{,}67, \qquad \frac{\pi b^2\mu\varepsilon}{kM} \approx 0{,}70.$$

Н. А. Ростовцев

1321. Об оценке геоэлектрических глубинных зондирований на основе метода интегральных уравнений. Б у х х е й м (Über die Auswertung geoelektrischer Tiefensondierungen nach einer Integralgleichungsmethode. B u c h h e i m W o l f g a n g), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 337—341 (нем.)

Задача сводится к определению функции $l(z)$ из интегрального уравнения

$$\Phi_0(r, z) - \Phi(r, z) = (lM)_{r,z}\cdot\Phi,$$

где

$$\Phi_0(r, z) = k/\sqrt{r^2 + z^2},\ k = \text{const},\ \text{и}$$

$$(lM)_{r,z}\Phi = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} l(z')\,dz'\int_0^{\infty} r'dr'\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\,J_0(\lambda r')\times$$

$$\times\left(e^{-\lambda|z-z'|} + e^{-\lambda(z+z)}\right)\frac{\partial\Phi(r', z')}{\partial z'}\,d\lambda.$$

Функция $\Phi(r, z)$ неизвестна, однако ее значения при $z = 0$ заданы. Решение строится в виде ряда $l(z) = \Sigma_{i=1}^{\infty} l_i(z)$, члены которого удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_0(r, 0) - \Phi(r, 0) = (l_1M)_{r,0}\cdot\Phi_0,$$

$$0 = (l_2M)_{r,0}\cdot\Phi_0 - (l_1M)_{r,0}\cdot(l_1M)\,\Phi_0,$$

$$0 = (l_3M)_{r.0}\cdot\Phi_0 - (l_1M)_{r,0}\cdot(l_2M)\,\Phi_0 -$$

$$-(l_2M)_{r,0}(l_1M)\,\Phi_0 + (l_1M)_{r.0}(l_1M)^2\Phi_0 \text{ и т. д.}$$

Эти уравнения имеют вид

$$f(r) = \int_0^{\infty} K(r, z')\,g(z')\,dz',$$

где $f(r)$ — данная, а $g(z)$ — искомая функции, и

$$K(r, z') = \int_0^{\infty} r'dr'\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\,J_0(\lambda r')\,e^{-\lambda z'}\,\frac{\partial\Phi_0(r', z')}{\partial z'}\,d\lambda.$$

Допуская, что функция $G(z) = \int_0^z g(z')\,dz'$ ограничена при $0 \leqslant z < \infty$ и что существует интеграл

$$F(\mu) = \int_0^{\infty} rJ_0(\mu r)\,f(r)\,dr,$$

автор приходит к уравнению

$$F(\mu) = -k\int_0^{\infty} G(\zeta/2)e^{-\mu\zeta}d\zeta,$$

решение которого он дает в виде

$$G(\zeta/2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Lambda_m(\zeta), \qquad (1)$$

где

$$\Lambda_m(\zeta) = (e^{\zeta/2}/m!)(\zeta^m e^{-\zeta})^{(m)},$$

а числа a_n суть коэффициенты разложения

$$F[(1+u)/2(1-u)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n.$$

Сходимость рядов не исследуется.

Примечание референта. Сколько-нибудь подробного вывода формулы (1) автор не дает; между тем формула эта явно ошибочна. Повидимому, следует писать $G(\zeta/2) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n\Lambda_n(\zeta)$.

С. Г. Михлин

См. также: 1173, 1228, 1365

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1322. **Разрывные решения с угловыми точками в вариационном исчислении. Фёллингер** (Diskontinuierliche Lösungen mit Spitzen in der Variationsrechnung. Föllinger Otto), Arch. Math., 1953, 4, № 2, 121—132 (нем.)

Рассматривается вариационная задача:
Найти минимум функционала

$$I(C)=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt \qquad (1)$$

в классе допустимых кривых $C: x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, лежащих внутри заданной области G и соединяющих две ее фиксированные точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, причем функция $F(x, y, x', y')$ для всех точек с $(x, y)\in G$, $x'^2+y'^2>0$ предполагается четырежды непрерывно дифференцируемой по всем переменным и положительно однородной первой степени относительно x', y'.

Кривая, реализующая минимум функционала (1), ищется в виде кривой C_0 с угловой точкой в $P_0(x_0, y_0)$, состоящей из двух кусков:

$$E_0: x=x_0(t),\ y=y_0(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_0;$$
$$\overline{E}_0: x=\overline{x}_0(t),\ \overline{y}_0(t),\ y=\ t_0\leqslant t\leqslant t_2.$$

При исследовании вариационных задач, экстремалями которых служат ломаные кривые, обычно делается предположение:

$$\overline{\Theta}_0-\Theta_0\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi),$$

где Θ_0 и $\overline{\Theta}_0$ — углы наклона касательных к кривым E_0 и $\overline{E}_0$ в точке P_0 (Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, B. G. Teubner, Leipzig, 1909, 375).

В реферируемой работе исследуется случай

$$\overline{\Theta}_0-\Theta_0=\pi,$$

т. е. случай, когда касательные к E_0 и $\overline{E}_0$ в точке P_0 имеют противоположные направления. Предполагается, что E_0 и $\overline{E}_0$ удовлетворяют условиям Лежандра и Якоби в строгом смысле.

Используя два однопараметрических семейства экстремалей, исходящих соответственно из точек P_1 и P_2 и содержащих в себе E_0, $\overline{E}_0$, а также склеивая их в окрестности точки P_0, автор строит интеграл вдоль экстремалей и доказывает, что если C_0 реализует минимум функционала (1), то в точке P_0 необходимо выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана, а также $\Omega_0>0$, где Ω_0 — известная функция Каратеодори. Доказывается, что рассматриваемая вариационная задача не может иметь сильного минимума. Далее, выбирая для двух однопараметрических семейств, включающих в себя E_0 и $\overline{E}_0$, некоторое специальное параметрическое представление, автор доказывает следующее утверждение: если C_0 реализует минимум функционала (1), E_0 и $\overline{E}_0$ удовлетворяют условиям Лежандра и Якоби в строгом смысле, а в точке P_0 справедливы условия

$$\Omega_0>0 \text{ и } F_0=F(x_0, y_0, p_0, q_0)\neq 0,$$

где p_0 и q_0 — направляющие косинусы касательной к E_0 в точке P_0, то имеют место следующие неравенства:

$$k-\overline{k}\geqslant \Phi=$$
$$=\frac{\sqrt{\overline{x}_0'^2+\overline{y}_0'^2}\,[F_{x'}(F_y+\overline{F}_y)-F_{y'}(F_x+\overline{F}_x)]^2}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}\,\Omega_0\,(F_{x'}^2+F_{y'}^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

при $F_0>0$,

$$\overset{\frown}{k-\overline{k}}\leqslant -\Phi \qquad (3)$$

при $F_0<0$. Здесь аргументами всех производных F и $\overline{F}$ соответственно являются x_0, y_0, p_0, q_0 и x_0, y_0, $\overline{p}_0$, $\overline{q}_0$, k и $\overline{k}$ — кривизны кривых T и $\overline{T}$, проходящих через точку P_0 трансверсально к указанным выше двум семействам экстремалей, содержащим в себе E_0 и $\overline{E}_0$. При помощи этого утверждения доказывается, что если кривая C_0 реализует минимум функционала (1) и кривая угловых точек (т. е. кривая, на которой расположены угловые точки всех экстремалей вышеупомянутого склеенного семейства экстремалей) не пересекает трансверсально кривую E_0, то в случае $F_0>0$ ($F_0<0$) кривая E_0 и трансверсаль $\overline{T}$ в окрестности точки P_0 расположены по разные стороны (с одной и той же стороны) от кривой T.

Далее доказывается теорема о достаточных условиях минимума: если C_0 не имеет кратных точек, удовлетворяет условиям Лежандра и Якоби в строгом смысле, условиям Вейерштрасса — Эрдмана и $\Omega_0>0$ в P_0, а также если выполняются неравенства (2) и (3), то для всех ломаных кривых C с угловыми точками P, лежащих в достаточно близкой окрестности кривой C_0, справедливо неравенство $I(C_0)\leqslant I(C)$, т. е. C_0 реализует минимум функционала (1). Приводится обстоятельно разобранный пример. *М. К. Керимов*

1323. **Плоские вариационные задачи со свободными концами. Фёллингер** (Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten. Föllinger Otto), Math. Z., 1953, 58, № 1, 98—112 (нем.)

Рассматривается вариационная задача:

$$I(C)=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt=\min, \qquad (1)$$

где F удовлетворяет обычным условиям (см. реф. 1322). Кусочно-гладкая кривая

$$C: x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

называется допустимой, если $\{x(t), y(t)\}\in G$, $\{x(t_1), y(t_1)\}\neq\{x(t_2), y(t_2)\}$. В отличие от обычных вариационных задач, где концы допустимых кривых предполагаются фиксированными или передвигающимися по заданным кривым, здесь на концы допустимых кривых не накладывается никаких условий.

Допустимая кривая

$$E_0: x=x_0(t),\ y=y_0(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

с концами $P_1=\{x_0(t_1), y_0(t_1)\}$ и $P_2=\{x_0(t_2), y_0(t_2)\}$, по определению, реализует сильный относительный минимум функционала $I(C)$, если существуют окрестности U, B_1, B_2, $B_1\subset U$, $B_2\subset U$, $B_1\cap B_2=0$, соответственно кривой E_0 и точек P_1 и P_2 такие,

что для любой допустимой кривой $C \subset U$ с концами $\{x(t_1), y(t_1)\} \in B_1$ и $\{x(t_2), y(t_2)\} \in B_2$ справедливо неравенство $I(E_0) \leqslant I(C)$. Если $I(E_0) = I(C)$ только для $C \equiv E_0$, то минимум называется строгим. Случай задачи (1), когда допустимые кривые выходят из одной фиксированной точки, а концы их перемещаются внутри некоторого круга достаточно малого диаметра, исследовал А. М. Размадзе (Math. Ann., 1914. 75, 380—401), результаты которого кратко излагаются в реферируемой статье.

Если E_0 реализует минимум $I(C)$, то она должна удовлетворять уравнению Эйлера, условиям Лежандра, Якоби и Вейерштрасса (коротко: условиям (V)). Если эти условия выполняются в строгом смысле, то это будем обозначать (V′). Пусть α_1 и α_2 — углы наклона касательных к E_0 в точках P_1 и P_2; тогда в точке P_1 кривой E_0 должны выполняться условия:

$$F_{x'}|_1 = 0, \quad F_{y'}|_1 = 0, \tag{A_1}$$

$$x'_0 F_x + y'_0 F_y |_1 < 0, \tag{B'_1}$$

где $|_1$ означает результат подстановки аргументов t_1, $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$. В точке P_2 справедливы соответственно условия (A_2) и (B'_2) (со знаком >0 в неравенстве (B'_2)).

Обозначим через

$$x = \zeta(a), \quad y = \eta(a), \quad |a - a_0| \leqslant \delta$$

уравнения так называемой кривой концов (Riβpunktkurve), проходящей через точку P_1, и пусть

$$x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_2,$$
$$T_1 < t_1, \quad T_2 > t_2, \quad |a - a_0| \leqslant \delta \tag{2}$$

— однопараметрическое семейство экстремалей, определяемое этой кривой.

Для точки P_2 аналогично

$$x = \overline{\zeta}(a), \quad y = \overline{\eta}(a), \quad |a - a_0| \leqslant \delta$$

— уравнения кривой концов, проходящей через точку P_2, и

$$x = \overline{\varphi}(t, a), \quad y = \overline{\psi}(t, a), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_2, \quad |a - a_0| \leqslant \delta \tag{3}$$

— соответствующее однопараметрическое семейство экстремалей. Тогда E_0 должна удовлетворять условию (C'_1): правая фокальная точка t''_1 семейства (2) на E_0 (первый нуль нетривиального решения уравнения Якоби $\Delta(t, a_0)$, следующий за t_1) не должна лежать на сегменте $[t_1, t_2]$, — а также условию (C'_2): левая фокальная точка t'''_2 семейства (3) на E_0 (первый нуль нетривиального решения уравнения Якоби $\overline{\Delta}(t, a_0)$, предшествующий t_2) не должна лежать на сегменте $[t_1, t_2]$.

Рассматриваются случаи: 1) $\Delta(t, a_0) > 0$ в $[t_1, t_2]$; тогда $\overline{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) > 0$; 2) $\Delta(t, a_0) < 0$ в $[t_1, t_2]$; тогда $\overline{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) < 0$.

Доказывается, что если E_0 реализует минимум, то справедливы неравенства (условие (C_{12})):

$$\Delta_t - \overline{\Delta}_t |_2 \geqslant 0 \quad \text{в случае 1),}$$

$$\Delta_t - \overline{\Delta}_t |_2 \leqslant 0 \quad \text{в случае 2).}$$

Значок 2 показывает, что неравенства берутся в точке $t = t_2$. Через (C'_{12}) будем обозначать условие (C_{12}) без знака равенства в приведенных неравенствах.

Далее условие (C_{12}) интерпретируется геометрически и, в частности, получается условие, аналогичное необходимому условию Блисса для вариационных задач с допустимыми кривыми, оба конца которых перемещаются по заданным кривым.

Даются также достаточные условия минимума: если кривая E_0 не имеет кратных точек, удовлетворяет условиям (V′), а также условиям (A_1), (B'_1), (C'_1), (A_2), (B'_2) и (C'_{12}), то E_0 реализует сильный строгий минимум. Наконец, рассматривается исключительный случай задачи (1), когда начала допустимых кривых перемещаются по заданной кривой, а концы остаются свободными, причем предполагается, что E_0 может иметь в точке $t = t_2$ с заданной кривой касание любого порядка. *М. К. Керимов*

1324. Доказательство правила множителей для изопериметрической задачи. Методическая заметка. Ахиезер Н. И., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, 40, 91—93 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

Для изопериметрической задачи:

$$J_0(y) = \int_a F_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx = \min$$

при условиях

$$J_k(y) = \int_a^b F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx = l_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

дается новое доказательство правила множителей. *М. К. Керимов*

1325. О вариационной задаче, для которой необходимым условием экстремума является дифференциальное уравнение третьего порядка. Куперман (On a variational problem having a third order differential equation as a necessary condition for an extremum. Cooperman Philip), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 309—310 (англ.)

Дается пример вариационной задачи, для которой уравнения Эйлера—Лагранжа эквивалентны нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка. Показывается, что уравнения Эйлера — Лагранжа для задачи определения функций u, ρ таких, чтобы интегралы

$$E = \iiint \left[\frac{1}{2}(\nabla u)^2 - 4\pi\rho u\right] dxdydz,$$
$$H = \iiint k\rho\,(\nabla u)^2\, dxdydz$$

были одновременно экстремизированы относительно вариации функции u, эквивалентны уравнению

$$\nabla[k\nabla^2 u \nabla u] = 0.$$

В. П. Ильин

См. также: 1255, 1365

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

326. **Показательная и логарифмическая функции в гимназиях. Гаск** (Exponential och logaritmfunktionen på gymnasiet. Gask H.), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 4, 156—160, 182 (швед.; резюме англ.)

В связи с обновлением школьных программ в шведских журналах ведется обсуждение порядка изложения круга вопросов, относящихся к показательной функции.

Автор предлагает разработку, в основу которой положено следующее определение числа e, имеющее ясный геометрический смысл и не ведущее к вычислительным трудностям. Число e есть такое значение a, что график функции $y = a^x$ пересекает вертикальную ось координат под углом в 45° (т. е. это решение уравнения $\lim_{h \to 0} (a^h - 1)/h = 1$). Формула $\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$ отсюда вытекает в дальнейшем.

В. Л. Гончаров

1327. **Вывод формул для $\sin(A - B)$ и $\cos(A - B)$. Паскуаль** (A derivation of $\sin(A - B)$ and $\cos(A - B)$. Pascual M. J.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 416 (англ.)

1328. **Заметка о неопределенных выражениях. Пейдж** (A note on indeterminate forms. Paige L. J.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 189—190 (англ.)

Пусть для $f(x)$ с $f(0) = 0$ существуют $f'(x)$ и окрестности нуля и конечный $\lim_{x \to 0} f(x)/f'(x) = L$. Доказывается, что $L = 0$. При этих предположениях верно также, что $\lim_{x \to 0} x^{f(x)} = 1$.

А. А. Конюшков

1329. **О некоторых итерационных последовательностях. I, II, III. Байрактаревич** (Sur certaines suites itérées. I, II, III. Bajraktarevic Mahmud), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 9, 881—883, № 10, 988—989, № 11, 1125—1127 (франц.)

Пусть функция $f(x)$, определенная при $-a \leqslant x \leqslant a$, обладает следующими свойствами: 1) монотонно не убывает; 2) $f(-a) \geqslant 0$; 3) $f(x) > x$ при $x < a$; 4) $f(a) = a$; 5) $\lim_{x \to \omega - 0} f(x) = \omega$, $0 \leqslant \omega \leqslant a$ и ω — наименьшее число с таким свойством. Каждому числу z сегмента $[0,2]$, имеющему двоичное разложение $z = d_0, d_1, d_2, \ldots$, сопоставляется последовательность $\{\varepsilon_\nu\}$, именно, $\varepsilon_\nu = 1$, если $d_\nu = d_{\nu-1}$; $\varepsilon_\nu = -1$, если $d_\nu \neq d_{\nu-1}$; по условию $d_{-1} = 0$ (для двоично-рациональных чисел берется только одно разложение). Паре чисел t, z, где $-a \leqslant t \leqslant a$ $0 \leqslant z \leqslant 2$, сопоставляется последовательность

$$x_n(z, t) = \varepsilon_0 f\{\ldots[\varepsilon_n f(t)]\ldots\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Без доказательств формулируются предельные свойства этой последовательности, особенно при $t = 0$; в частности $x_\nu(z, 0)$ имеет самое большее две предельные точки: верхнюю $\bar{\xi}(z)$ и нижнюю $\underline{\xi}(z)$. Исследуется влияние свойств функции $f(x)$ таких, как непрерывность и строгая монотонность, выпуклость, вогнутость, наличие производной и т. д. на поведение функций $\bar{\xi}(z)$ и $\underline{\xi}(z)$. Между функциями $f(x)$, удовлетворяющими условиям 1) —5), и функциями $g(x)$ ($g(x) = \bar{\xi}(x)$ или $g(x) = \underline{\xi}(x)$) устанавливается взаимнооднозначное соответствие, эти функции удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(g(2z)) = g(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Во второй заметке автор получает условия, необходимые и достаточные для сходимости последовательности $x_n(z, t)$ и при некоторых условиях, наложенных на $f(x)$, находит для $f(x)$ непрерывную итерацию, однако формулировки слишком громоздки для реферата. В третьей заметке автор получает аналогичные результаты для последовательностей функций $f_\nu(x)$ и $g_\nu(x)$, связанных функциональными уравнениями $f_\nu[g_{\nu+1}(2z)] = g_\nu(z)$.

Ф. В. Широков

1330. **Неопределенности и правило Лопиталя. Йейтс** (Indeterminate forms and l'Hospital's rule. Yates Robert C.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 113—114 (англ.)

Прибегая к геометрическим интерпретациям, автор указывает способы, делающие правило Лопиталя более доступным для начинающих.

В. Л. Гончаров

1331. **О производной произвольного порядка. Мамбриани** (Su la derivazione d'ordine qualsiasi. Mambriani Antonio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 142—150 (итал.)

Устанавливаются различные свойства производной произвольного порядка, определяемой формулой

$$D_{x_0}^{-\nu} f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(t)\, dt.$$

Ссылки на литературу полностью отсутствуют.

М. К. Фаге

1332. **Необходимое условие для сходимости $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Ливингстон** (A necessary condition for the convergence of $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Livingston A. E.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 250—251 (англ.)

Пусть функция $G(x) = \int_A^x [g(t)]^{-1}\,dt$ монотонно возрастает к $+\infty$. Если функция $f(x) \cdot g(x)$ не возрастает в некоторой окрестности бесконечности и $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, то $\lim_{x \to \infty} [f(x) \cdot g(x) \cdot G(x)] = 0$.

Показано, что результат Норриса (РЖМат, 1953, 324) является частным случаем доказанного предложения.

М. И. Алхимов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1333. **О теоремах об эквивалентных произведениях. Слейтер** (A note on equivalent product theo-

rems. Slater L. J.), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 127—128 (англ.)

В статье Бэйли (Bailey W. N., Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 217—221) доказано тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n z^{-1})(1+q^{n-1}z)(1-q^{2n-1}z^{-2})\times$$

$$\times(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^n)=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n-2}z^3)(1-q^{3n-1}z^{-3})(1-q^{3n})+$$

$$+z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n-2}z^{-3})(1-q^{3n-1}z^3)(1-q^{3n}). \quad (1)$$

Но ранее Бэйли (Bailey W. N., Quart. J. Math. 1936, 7, 105—115) был получен более общий результат:

$$\Pi(b/a,\ aq/b,\ df/a,\ aq/df,\ ef/a,\ aq/ef,\ b\,de/a,\ aq/b\,de)=$$
$$=\Pi(f/a,\ aq/f,\ b\,d/a,\ aq/bd,\ be/a,\ aq/be,\ def/a,\ aq/def)-$$
$$-(b/a)\,\Pi(d,\ q/d,\ e,\ q/e,\ f/b,\ qb/f,\ bdef/a^2,\ a^2q/bdef), \quad (2)$$

где

$$\Pi(a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)(1-bq^n)\ldots(1-hq^n).$$

В реферируемой заметке формула (1) выводится из формулы (2).

Затем автор приводит, со ссылкой на доказательство, тождество, еще более общее, чем тождество (2).

Далее показывается, что формула (2) и полученная автором более общая формула представляют лишь иной вид одной общей теоремы о сигма-функциях Вейерштрасса в двух частных случаях.

Г. А. Ломадзе

1334. О функции Миттаг-Лефлера и некоторых ее обобщениях. Эмбер, Агарвал (Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelquesunes de ses généralisations. Humbert P., Agarwal R. P.), Bull. sci. math., 1953, 77, сер. 10, 180—185 (франц.)

Исходя из операционного соотношения $E_\alpha(t^\alpha)\supset \supset p^\alpha/(p^\alpha-1)$ для функции Миттаг-Лефлера

$$E_\alpha(x)=\sum_0^\infty \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)},$$

авторы выводят соотношения:

$$t=\int_0^t E_\alpha(\lambda^\alpha)\left[1-\frac{(t-\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]d\lambda.$$

$$E_\alpha(t^\alpha)=E_{2\alpha}(t^{2\alpha})+\int_0^t E_{2\alpha}(\lambda^{2\alpha})\left[(t-\lambda)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)\right]d\lambda$$

и т. д. Аналогичные формулы выводятся и для обобщенной функции Миттаг-Лефлера

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_0^\infty \frac{x^{m+(\beta-1)/\alpha}}{\Gamma(m\alpha+\beta)},$$

например,

$$t=\int_0^t E_{\alpha,\beta}(\lambda^\alpha)\left[\frac{(t-\lambda)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}-\frac{(t-\lambda)^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]d\lambda$$

и т. д. В заключение рассматриваются функции

$$_1E_\alpha(x)=\sum_0^\infty \frac{x^m}{m!\,\Gamma(m\alpha+1)},$$

$$_1E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_0^\infty \frac{x^m}{m!\,\Gamma(m\alpha+\beta)},\ \ldots,$$

и их связи с гипергеометрическими функциями и обобщениями бесселевых функций. *В. И. Левин*

1335. Одно свойство относительного экстремума полинома Якоби. Гаттески (Una proprietà degli estremi relativi dei polinomi di Jacobi. Gatteschi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 4, 398—400 (итал.)

Доказывается предельная формула

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right]^\alpha\left[\cos\frac{\varphi_{r,n}}{2}\right]^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi_{r,n})=$$
$$=J_\alpha(j_{r,\alpha+1}),$$

где $\varphi_{r,n}$ есть абсцисса r-го относительного экстремума полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)$, а $j_{r,\alpha+1}$ есть r-й корень функции Бесселя $J_{\alpha+1}(x)$ первого рода.

Н. С. Кошляков

1336 К. Шаровые функции. Лензе (Kugelfunktionen. Lense J., 2 Aufl., 310 S., 51 Abb., Akadem. Verl.-Ges. Geest und Portig, Leipzig, 1954), Neues vom Büchermarkt, 1954, № 4, 5 (библ.)

1337 РЕЦ. Высшие трансцендентные функции. Т. I. Бейтман (Higher transcendental functions. Vol. I. Bateman Harry, 302 pp., McGraw-Hill Book Co., New York, 1953, 6.50 doll.) [**Рецензия: Хаммер** (Hammer Carl), J. Franklin Inst., 1953, **256**, № 6, 590—591 (англ.)]

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1338. Замечания к методу Лапласа. Руни (Some remarks on Laplace's method. Rooney P. G.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1953, 47, сер. 3, June, 29—34 (англ.)

Выводится асимптотическая формула

$$\int_a^b e^{kh(x)}(x-a)^\nu\varphi(x)\,dx\sim$$
$$\sim\left\{-\frac{(2m)!}{kh^{(2m)}(a)}\right\}^{\frac{\nu+1}{2m}}\frac{\varphi(a+0)}{2m}\,e^{kh(a)}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2m}\right)$$

при $k\to\infty$ в предположениях, что 1) $a<a+\eta<b$; 2) $h(x)\in C^{2m}(a\leqslant x\leqslant a+\eta)$, $h^{(n)}(a)=0$. ($n=1, 2,\ldots$

..., $2m-1$), $h^{(2m)}(a) < 0$ и $h(x)$ не возрастает на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$; 3) $\varphi(a+0)$ существует и отлично от нуля, и $(x-a)^{\nu}\varphi(x) \in L(a, b)$. Эта формула переносится на тот случай, когда множитель при показательной функции под знаком интеграла обращается в нуль внутри интервала интегрирования, а также на двойные интегралы. Приводится пример:

$$\int_0^{\infty} \exp(-kx^8)\sin^6 x\,dx \sim (1/8)\,k^{-7/8}\,\Gamma(7/8), \quad k \to \infty.$$

Результаты автора при $m = \nu = 1$ имеются в книге Уиддера (Widder D. V., The Laplace transform, Princeton, 1946, 296—297). *В. И. Левин*

1339. Обобщения преобразования Стилтьеса. Саксена (Generalizations of Stieltjes transform. Saksena K. M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 45, № 3, 101—107 (англ.)

Преобразование Стилтьеса определяется формулой

$$f(x) = \int_0^{\infty} (x+t)^{-1}\,\psi(t)\,dt. \qquad (1)$$

Формально его можно рассматривать как итерированное преобразование Лапласа. Если вместо преобразования Лапласа брать различные его обобщения, то итерированием можно получить различные формулы, которые связывают первый оригинал со вторым изображением. Автор дает три таких, довольно сложных, соотношения и называет их обобщениями формулы (1).

Примечание референта. Формулы содержат под знаком интеграла гипергеометрические функции ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$, которые при выводе формул сначала даются в виде рядов. Автор не замечает, что эти ряды в части интервала расходятся, и поэтому вывод формул недостаточно обоснован.

Э. Риекстыньш

1340. Ряды Фурье и преобразование Лапласа. Беркеш (Fouriersche Reihen und Laplacesche Transformation. Berkeš Branko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 3, 196—212 (нем.; резюме хорв.)

Схематические графики, ряды Фурье и преобразования Лапласа шестидесяти шести периодических функций (оригиналов). *М. К. Фаге*

1341. О распространении асимптотической формулы Лапласа на кратные интегралы. Асколи (Sopra un'estensione della formula asintotica di Laplace agli integrali multipli. Ascoli Guido), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 5—7 (итал.)

Автор дает краткий обзор ранее полученных условий, в которых справедлива восходящая к Лапласу (метод больших чисел) формула

$$J_{\nu} = \int_a^b f(x)\,[\varphi(x)]^{\nu}\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{c_2\nu}}\,f(\xi)\,[\varphi(\xi)]^{\nu+1/2} \qquad (1)$$

при $\nu \to +\infty$,

а также различные ее обобщения, и сообщает о своих новых результатах в этом вопросе. В формуле (1) $\xi \ni (a, b)$ — точка, в которой $\varphi(x)$ принимает наибольшее значение, а $c_2 = -\varphi'(\xi)/2$

Подробное исследование будет опубликовано в Rend. Sem. Mat. Padova. *Э. Я. Риекстыньш*

1342. Некоторые вопросы, относящиеся к N-кратному ($N \geqslant 2$) преобразованию Лапласа. Пистойя (Alcune questioni relative alla trasformata N-pla ($N \geqslant 2$) di Laplace. Pistoia Angelo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 185—192 (итал.)

Для двух функций $F(x_1, \ldots, x_N)$ $(-\infty < x_i < +\infty,$ $i = 1, \ldots, N)$ и $G(t_1, \ldots, t_k)$ $(-\infty < t_i < +\infty,$ $i = 1, \ldots, k)$, $k \leqslant N$, вводится обобщенная свертка, зависящая от $(k \times N)$-матрицы $\|a_{si}\|$:

$$(G \times F)(x_1, \ldots, x_N) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int G(t_1, \ldots, t_k)\,F\Big(x_1 - \sum_{s=1}^{k} t_s a_{s1}, \ldots, x_N - \sum_{s=1}^{k} t_s a_{sN}\Big)\,dt_1 \ldots dt_k$$

и формулируется теорема умножения для соответствующих кратных преобразований Лапласа.

Кроме того, для двойного преобразования Лапласа

$$f(p, q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-px-qy}\,F(x, y)\,dx\,dy$$

указывается ряд свойств f, достаточных для обращения этого преобразования, а также приводятся простейшие «тауберовские» теоремы. Доказательства отсутствуют. Автор ссылается на ряд работ Америо (L. Amerio), касающихся этих вопросов. *М. К. Фаге.*

1343 К. Операционное исчисление. Микусиński (Rachunek operatorów. Mikusiński Jan. (Monografie matematyczne, XXX), 368 str. Polskie towarzystwo matematyczne, Warszawa, 1953, 20 zł.) (польск.)

Книга представляет систематический курс операционного исчисления с большим количеством разнообразных приложений, построенный без использования аппарата преобразования Лапласа. Этим достигается расширение области приложимости исчисления, так как отпадает вопрос о сходимости интеграла Лапласа. Новое обоснование операционного исчисления, изложенное автором в ряде статей (1950—1952), состоит в том, что рассматривается кольцо функций, непрерывных на полуоси $t \geqslant 0$, с обычным определением сложения и вычитания, но с определением произведения как свертки. В силу теоремы Титчмарша о свертках — это кольцо без делителей нуля, так что для любой пары элементов кольца a и b существует не более одного элемента кольца c, удовлетворяющего равенству $a = cb$. По известной теореме алгебры (см., например, Ван-дер-Варден, Современная алгебра, Гостехиздат, М.—Л., 1947, ч. I, стр. 62—65) для коммутативного кольца без делителей нуля можно построить поле отношений. Операторами называются элементы a/b поля отношений рассматриваемого кольца. Если элементы кольца обозначать через $a = \{a(t)\}$, то оператор $l = \left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} \Big/ \{1\}$ оказывается оператором интегрирования (в пределах от 0 до t). Затем вводится в рассмотрение оператор $s = 1/l$, и легко развивается теория рациональных функций оператора s. Эти

рассмотрения обобщаются на некоторые классы разрывных функций с тем, чтобы распространить исчисление на такие функции как $[t]$, $1/\sqrt{t}$ и т. д. В дальнейшем главная трудность заключается во введении достаточно широких классов функций оператора s и их идентификации с элементами поля. В книге рассматриваются общие теоремы о функциях оператора s, и на основе этих теорем конкретные функции оператора s вводятся либо разложением в ряд, либо как решения дифференциальных уравнений. Стройность изложения общей части операционного исчисления нарушается в книге тем, что почти каждая полученная теорема сразу применяется к решению целого класса прикладных задач, что надолго прерывает изложение теории.

Книга состоит из пяти частей: I. Алгебра операторов; II. Дифференциальное исчисление операторов; III. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; IV. Интегральное исчисление операторов. V. Формулы и таблицы. В части I рассматривается обоснование операционного исчисления, разъясняются основные понятия (на большом количестве хорошо подобранных примеров), доказывается теорема Титчмарша и развивается алгебраическая часть исчисления. Вслед за этим подробно рассматривается теория электрических цепей с сосредоточенными постоянными. В этой же части вводятся разрывные «оригиналы». В части II рассматриваются общие вопросы, связанные с функциями операторов, их непрерывностью, пределами и т. п., которые затем применяются к определению функций оператора s, удовлетворяющих уравнению $x''(\lambda) = wx(\lambda)$, где $w = a^2s^2$ или $w = a^2s$. Эти функции сейчас же применяются к детальному рассмотрению колебаний струны, распространению теплоты и, после краткого обзора функций Бесселя, к решению задач, связанных с телеграфным уравнением. Часть III посвящена рассмотрению основных фактов теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами как обыкновенных, так и, главным образом, в частных производных. Здесь также приводится много примеров уравнений высших порядков и их интегрирования операционным методом. В части IV вводится определение интеграла функции оператора и изучаются его свойства, которые иллюстрируются на разобранных ранее примерах. В заключение вводится преобразование Лапласа и устанавливается связь функции оператора s с преобразованием Лапласа. Часть V состоит из кратких таблиц операционных соотношений, таблицы схем простых четырехполюсников и соответствующих им матриц, а также таблиц значений некоторых специальных функций.

В. И. Левин

1344 К. Основы операционного исчисления. Крылов Б. Л. (Учеб. пособие для авиац. ин-тов), 44 стр. Казанск. авиац. ин-т (Кафедра высш. матем.), Казань, 1953, беспл.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1345. Комбинаторика и ее применение в артиллерии. Заборовский (Kombinatoryka i jej zastosowanie w artylerii. Zaborowski W.), Przegl. artyl., 1953, 9, № 12, 40—48 (польск.)

Определяются и разъясняются на примерах основные понятия комбинаторики (размещения, перестановки, сочетания) и указываются применения комбинаторных методов к решению простейших задач артиллерийской стрельбы.

Статья является пособием для учащихся-артиллеристов. *Л. Е. Садовский*

1346. Упрощение некоторых стандартных задач по интегрированию. Данкан (Some standard problems in integration simplified. Duncan D. G.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 6, 421—422 (англ.)

1347 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Лав, Рейнвилл (Differential and integral calculus. Love Clyde E., Rainville Earl D., The Macmillan Co., New York, 1954,) Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 3 (библ.)

1348 К. Основы математического анализа. Фролов Н. А., 108 стр., Горьковск. гос. пед. ин-т (заоч. отд.), Горький, 1953

Учебное пособие по математическому анализу для педагогических институтов. Кратко излагаются с необходимыми доказательствами наиболее важные понятия и узловые вопросы математического анализа. Каждая глава заканчивается параграфом, содержащим обзор работ русских и советских ученых по данному разделу математики.

Содержание книги по главам таково: 1. Множества (простейшие понятия); 2. Числовая последовательность (предел последовательности, теоремы Больцано — Вейерштрасса и Коши); 3. Функции (теоремы о пределах, непрерывность и равномерная непрерывность функций); 4. Производная и дифференциал. Здесь, в частности, подробно рассмотрены формула Тейлора и ее приложения; 5. Интеграл (дано понятие интеграла и доказательство теоремы о существовании интеграла от непрерывной функции); 6. Ряды (простейшие сведения о рядах, вычисление логарифмов при помощи рядов, биномиальный ряд); 7. Дифференциальные уравнения (После основных понятий изложена теория однородного и неоднородного уравнения n-го порядка и в качестве приложения подробно рассмотрено уравнение колебательного движения). *М. К. Керимов*

1349 К. Интегральное исчисление. Минквиц А. А., изд. 2-е, 92 стр., М-во торговли СССР, Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1954, беспл.

1350 К. Курс высшей математики. Смирнов В. И. (Для физ.-матем. фак. гос. ун-тов), изд. 6-е, Т. 3, ч. 1, 340 стр., Гостехиздат, М., 1954, 9 р. 45 к.

Реферат 5-го издания см. РЖМат, 1954, 1558.

1351 К. Лекции по математическому анализу. Т. I. Пиньедоли (Lezioni di analisi matematica. Vol. I. Pignedoli Antonio, 408 p., Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1953, 3500 L.), Bibliogr. ital., 1953, № 630, 449 (библ.)

1352 К. Элементарный курс высшей математики. Т. I. Дополнения к алгебре. Производные и их приложения. Кине (Cours élémentaire de mathé-

matiques supérieures. T. I. Compléments d'algèbre. Les dérivées et leurs applications. Quinet J., X + 164 pp., 64 fig., Dunod, Paris, 1953, 580 F.), Nouveaux livres scient. et industr., 1953, № 186, 4 (библ.)

1353 К. Высшая математика и притом понятная. Легкое введение в дифференциальное и интегральное исчисление для химиков, биологов и работников народного хозяйства. Томпсон (Höhere Mathematik- und doch verständlich. Eine Leichtfassliche Einführung in die Differential- und Integralrechnung für Chemiker, Biologen und Volkswirtschaftler. Thompson S. P., 238 S., Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K.-G., Lpz., 1953) (нем.)

1354 К. Дифференциальное исчисление. Глаголев А. А., Глаголева А. А., изд. 3-е перераб. и доп., 208 стр., М-во высш. образования СССР, Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1953, беспл.

1355 К. Курс высшей математики. Ч. I. Смирнов (Lehrgang der höheren Mathematik. Teil I. Smirnow W. I., 413 S., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1953) (нем.)

Перевод с русского.

1356 К. Курс высшей математики. Т. II, ч. 2. СмирновВ. И. (高等數學教程○第二卷,第二分册.斯米爾諾夫 В. И.›, 181 — 343 + 8 頁›商務印書館 (Шан-у иньшугуань), 上海 (Шанхай), 1953, 16500 юаней) (кит.)

Перевод с русского. Приложен краткий русско-китайский словарик математических терминов.

1357 К. Курс высшей математики. Т. III, ч. 3., СмирновВ. И. (高等數學教程○第三卷,第三分册○斯米爾諾夫 В. И.›, 357頁›商務印書館 (Шан-у иньшу гуань), 上海 (Шанхай), 1953, 17500 юаней) (кит.)

Перевод с русского. Приложены краткие словарики математических терминов: русско-китайский и китайско-русский.

1358 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Лея (Rachunek różniczkowy i całkowy. Leja E., Państwowe Wydawnictwo Naukove, 1953, 9.14 rb., 2.29 doll.), Biul. eksportowy, 1953, № 4/5, 15 (библ.)

1359 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Хубендик (Differential- och integralräkning. Hubendick Edvard, VIII+ 319 s., Sv. bokferl. (Bonnier), Sthlm., 1951 (utg. 1953), 14 Kart.), Svensk bokhandel, 1953, № 45, 758 (библ.)

1360 К. Введение в интегральное исчисление. Ярник (Úvod do počtu integrálního. Jarník Vojtěch, 295, Nakl. Čs. ak. věd., Praha, 1954, 33 Kčs), Česká kniha, 1954, № 8, 227 (библ.)

1361 К. Введение в дифференциальное исчисление. Ярник (Úvod do počtu diferencialního. Jarník V., 3 vyd., 450 str., 59 obr., CsAV, Praha, 1953), Přehl. techn. a hospod. liter. Energ. a elektrotechn., 1953, **10**, № 12, 404 (библ.)

1362 РЕЦ. Введение в высший анализ. Маркович (Úvod u višu analizu. Marković Željko, XII + 640 str., Školska knjiga, Zagreb, 1952) [**Рецензия: Курепа** (Kurepa Duro), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, сер. 2, № 1, 60—61 (хорв.)

1363 РЕЦ. Восемь лекций по математическому анализу. Хинчин (Osiem wykładów z analizy matematycznej. Chinczyn A., 264 str., PZWS, Warszawa, 1953, 8.90 Zł) [**Рецензия: Корчовский** (Korczowski Henryk), Matematyka, 1953, **6**, № 6, 49—50 (польск.)]

Рецензия на перевод с третьего русского издания.

1364 РЕЦ. Исчисление конечных разностей. Милн-Томпсон (The calculus of finite differences. Milne-Thompson L. M., 558 pp., Macmillan, London, 1951) [**Рецензия: Гельфонд А.,** Новые книги за рубежом, 1953, № 12, 51—53]

См. также: 1105, 1118, 1138, 1139, 1153, 1179, 1222, 1240, 1247, 1251, 1259, 1266, 1269, 1271, 1277, 1310, 1311, 1402, 1480, 1501

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1365. Вариационная теория собственных функций нелинейных интегральных и других операторов. Вайнберг М. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 375—406

Основная часть статьи посвящена доказательству существования собственных векторов у оператора Γ, определенного на вектор-функциях $u = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ равенством

$$\Gamma u = (\Gamma_1 u, \ldots, \Gamma_n u),$$

где

$$\Gamma_i u = \int_B K_i(x, y)\, g_i[u_1(y), \ldots, u_n(y), y]\, dy.$$

B — измеримое множество конечномерного пространства. Предполагается, что все ядра $K_i(x, y)$ симметричны и

$$g_i(u_1, \ldots, u_n, y) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, \ldots, u_n, y) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство существования собственных вектор-функций проводится вариационным методом: собственные вектор-функции конструируются по критическим точкам некоторого специального функционала, рассматриваемого на поверхностях уровня квадратичного функционала.

Как указывает автор, отличие реферируемой работы от предыдущих (Матем. сб., 1950, **26** (**68**), № 3, 365—394; 1952, **30** (**72**), № 1, 3—10) заключает-

ся в том, что в новых теоремах доказывается существование собственных вектор-функций $u=(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, удовлетворяющих условию

$$\int_B |u_i(x)|^p\,dx<\infty \quad (i=1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $p\geqslant 2$ (в старых теоремах предполагалось, что $p=2$). Некоторые предложения о существовании собственных вектор-функций, удовлетворяющих условию (1), также ранее публиковались автором (см., например, РЖМат, 1953, 1222).

Приведем в качестве примера теорему 3.4. Пусть выполнены следующие условия:

1. При каждом $i=1, \ldots, n$ последовательность вырожденных ядер

$$K_{im}(x, y)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\varphi_{i\nu}(x)\,\varphi_{i\nu}(y)}{\lambda_{i\nu}} \qquad (m=1, 2, 3, \ldots)$$

сходится в $L_p(B\times B)$ $(p\geqslant 2)$, причем среди собственных чисел $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots$ имеется конечное число положительных и произвольное число отрицательных. При каждом $i=1, \ldots, n$ функции $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots$ образуют ортонормальную систему в $L_2(B)$.

2. Оператор hu:

$$hu=(g_1[u_1(x), \ldots, u_n(x), x], \ldots$$
$$\ldots, g_n[u_1(x), \ldots, u_n(x), x])$$

есть непрерывный оператор с областью определения $L_{p,n}$ и областью значений в $L_{q,n}$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Через $L_{p,n}$ обозначается пространство вектор-функций $u=(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, удовлетворяющих условию (1), с нормой

$$\|u\|=\Big\{\sum_{i=1}^{n}\int_B |u_i(x)|^p\,dx\Big\}^{1/p}.$$

3. $\lim\limits_{\|u\|\to\infty}\int_B G[u_1(y), \ldots, u_n(y), y]\,dy=+\infty$.

4. Если $\|u\|>0$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\int_B u_i(y)\,g_i[u_1(y), \ldots, u_n(y), y]\,dy>0.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) Каково бы ни было положительное число c, существуют собственная вектор-функция $\omega=(\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x))$ и соответствующее ей положительное собственное число μ оператора Γ $(\Gamma\omega=\mu\omega)$, представимые в виде

$$\omega_i(x)=\sum_{\nu}\frac{e_{i\nu}\xi_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}}\varphi_{i\nu}(x), \quad e_{i\nu}=\operatorname{sign}\lambda_{i\nu},$$

$$\mu=c^{-2}\sum_{i=1}^{n}\int_B \omega_i(y)\,g_i[\omega_1(y), \ldots, \omega_n(y), y]\,dy>0,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\sum e_i\,\xi_{i\nu}^2=c^2.$$

б) Из множества собственных вектор-функций оператора Γ можно выделить последовательность таких, нормы которых (в пространстве $L_{p,n}$) возрастают. Среди этих последовательностей содержатся такие, нормы элементов которых неограниченно возрастают. *М. А. Красносельский*

1366. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. Гавурин М. К., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 6, 1093—1095

Пусть $\lambda_0, \overline{\lambda_0}$ и φ_0, ψ_0 — простые собственные числа и соответствующие им нормированные собственные векторы линейного оператора A_0, определенного на плотном подмножестве гильбертова пространства, и сопряженного оператора A_0^*. Рассмотрим возмущенный оператор $A=A_0+B$, где B — ограниченный оператор.

Пусть выполнены условия:

1) Оператор $A_0-\lambda_0$, рассматриваемый на ортогональном дополнении φ_0, имеет ограниченный обратный R.

2) $\gamma_0=|(\varphi_0, \psi_0)|>0$.

3) $s=\|B\|\,\|R\|<S=(1-\sqrt{1-\gamma_0^2})/2$.

Тогда утверждается, что:

1. Ближайшая к λ_0 точка спектра оператора A есть простое собственное число $\lambda=\lambda_0+\mu$ с собственным вектором φ, причем $(\varphi_0, \varphi)\neq 0$; $\overline{\lambda}$ есть простое собственное число A^* с собственным вектором ψ, причем $(\psi_0, \psi)\neq 0$.

2. $\|\varphi-\varphi_0\|\leqslant\dfrac{\gamma_0-\sqrt{\gamma_0^2-4s^2-4s\sqrt{1-\gamma_0^2}}}{2(s+\sqrt{1-\gamma_0^2})}<$

$<\dfrac{\gamma_0}{1+\sqrt{1-\gamma_0^2}}$ при условии, что $(\varphi_0, \varphi)=1$; аналогичная оценка верна для $\|\psi-\psi_0\|$.

3. $|\mu|\leqslant\|B\|\,(1+\sqrt{1-\gamma_0^2})/\gamma_0$.

4. Если $\lambda'=\lambda_0+\mu'$ — отличная от λ точка спектра A, то

$$|\mu'|\geqslant\Big(\frac{\gamma_0}{s}-\frac{1+\sqrt{1-\gamma_0^2}}{\gamma_0}\Big)\|B\|=$$
$$=\frac{\gamma_0}{\|R\|}-\frac{1+\sqrt{1-\gamma_0^2}}{\gamma_0}\|B\|.$$

Оценки 2—4 являются окончательными. Доказательства утверждений приведены не полностью.

А. Н. Балуев

1367. О точности приближенных методов разыскания собственных чисел интегральных операторов. Гавурин М. К., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 13—15

Полученные автором (см. реф. 1366) оценки собственных чисел возмущенного оператора применяются в случае, когда $A\varphi\equiv\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$, $A_0\varphi\equiv$ $\equiv\int_a^b K_0(s, t)\,\varphi(t)\,dt$, где $K_0(s, t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\,\overline{\beta_i(t)}$. Для чисел γ_0, $\|B\|$, $\|R\|$ даются выражения:

$$\|B\|^2\leqslant\int_a^b |K(s, t)-K_0(s, t)|^2\,ds\,dt,$$

$$\|R\| = |\lambda_0|^{-1} \max [\|W\|, 1], \ \gamma_0 = \lambda_0 (a, b),$$

где W — матрица порядка не выше $2n$, a и b суть n-мерные векторы, элементы которых эффективно вычисляются. *А. Н. Балуев*

1368. О существовании собственных значений и о полноте систем собственных элементов у линейных операторов. Т а л д ы к и н А. Т., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 6, 1121—1124

Пусть A — ограниченный линейный оператор, определенный на комплексном гильбертовом пространстве.

В первой части статьи доказывается несколько теорем (теоремы 1—5) о существовании собственного значения оператора A в круге Фредгольма, соответствующем этому оператору. Все доказательства вытекают из аналитических свойств резольвенты оператора. В доказательстве теоремы 2 имеется неточность, впрочем легко устранимая.

Во второй части статьи рассматривается система собственных элементов оператора A, пополненная присоединенными элементами. Отметим, что среди этих последних могут встретиться собственные элементы и что пополненная система представляет собой систему нуль-элементов в смысле Ф. Рисса. Устанавливаются условия полноты системы нуль-элементов оператора A, отвечающей множеству собственных значений в круге Фредгольма.

В статье имеются мелкие погрешности. На стр. 1121, строка 12 снизу, должно быть $\varepsilon_f = 1/|\lambda_0|$. На стр. 1121, строка 2 снизу, и на стр. 1122, строка 11 сверху, должно быть μ_0. На стр. 1122, строка 12 снизу, величина ε_f^n должна быть в числителе. На стр. 1123, в строках 2 и 3 сверху, пропущен два раза показатель n в выражении $(1 + M)^n$. *С. Н. Крачковский*

1369. О существовании собственных значений и о полноте системы собственных элементов у некоторых линейных операторов. Т а л д ы к и н А. Т., Матем. сб., 1954, **34**, № 2, 201—212

Более полное изложение результатов, опубликованных автором ранее (см. реф. 1368). Подробнее рассматривается случай неограниченного оператора, отображающего плотное множество на все пространство и имеющего ограниченный обратный оператор. *С. Н. Крачковский*

1370. Инвариантные расширения линейных функционалов. К л и (Invariant extension of linear functionals. K l e e V. L., Jr), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 1, 37—46 (англ.)

Выражение $[L, \mathscr{T}, f, p]$ означает, что выполняются условия: 1) L есть вещественное линейное пространство, $\mathscr{T}$ — некоторое множество линейных преобразований L в L; 2) f есть линейный функционал в линейном подпространстве D_f пространства L; 3) p есть положительно-однородный и полуаддитивный функционал в L; 4) $f \leqslant p$; 5) $TD_f \subset D_f$ и $fT = f$ для каждого $T \in \mathscr{T}$. $\langle L, \mathscr{T}, f, p\rangle$ обозначает множество всех F, для которых выполняется $[L, \mathscr{T}, F, p]$, а также $D_F = L$ и $F = f$ в D_f. I — тождественное преобразование в L.

В этих обозначениях автором доказана теорема: Если выполняется $[L, \mathscr{T}, f, p]$, то следующие утверждения равносильны:

(α) Множество $\langle L, \mathscr{T}, f, p\rangle$ не пусто.

(β) Для каждого конечного подмножества $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$, множество $\langle L, \mathscr{S}, f, p\rangle$ не пусто.

(γ) Если $x \in D_f$, $T_i \in \mathscr{T}$, $y_i \in L$, то $f(x) \leqslant p\left(x + \Sigma_1^k (T_i - I) y_i\right)$.

Если, кроме того, $\mathscr{T}$ является полугруппой, то каждое из утверждений (α) — (γ) равносильно также утверждению:

(δ) Существует $g \in \langle L, \{I\}, f, p\rangle$, для которого $gT_1T_2 = gT_2T_1$ и $gT_1 \leqslant p$ всякий раз, когда $T_1 \in \mathscr{T}$, $T_2 \in \mathscr{T}$.

Приводятся следствия из теоремы, содержащие результаты Агнью и Морса (Agnew R. P., Morse A. P., Ann. Math., 1938, **39**, 20—30), Данфорда (Dunford, Bol. Soc. mat. mexicana, 1946, **3**, 1—12), а также результаты некоторых других авторов, в том же направлении.

Автор приводит также такой результат:

Пусть K — выпуклый компакт в пространстве Банаха E и $\mathscr{T}$ — компактная группа (в равномерной топологии операторов) линейных ограниченных операторов, отображающих E на E и K в K. Тогда K содержит точку, неподвижную относительно всех операторов из $\mathscr{T}$.

Заметим, что введя норму $\|x\|_1 = \sup_{A \in \mathscr{T}} \|Ax\|$ топологически эквивалентную старой норме, мы превращаем операторы из $\mathscr{T}$ в изометрические операторы, и потому указанный здесь результат автора является очевидным следствием совместной теоремы М. С. Бродского и референта о существовании общей неподвижной точки изометрических преобразований E, отображающих K в K (Докл. АН СССР, 1948, **59**, № 5, 837—840). *Д. П. Мильман*

1371. К теореме Неймана о минимаксах. Н и к а и д о (On von Neumann's minimax theorem. N i k a i d ô H u k u k a n e), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 1, 65—72 (англ.)

Доказывается равенство $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} K(x, y) = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} K(x, y)$, в следующих предположениях относительно функции $K(x, y)$ и ее области определения: X и Y — выпуклые компактные множества в топологических линейных пространствах L и M; $K(x, y)$ непрерывна по x (по y) при любом фиксированном y (соответственно x), квазивогнута по x (т. е. $K(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) \geqslant \lambda$, если $K(x_1, y) \geqslant \lambda$, $K(x_2, y) \geqslant \lambda$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) и квазивыпукла по y (т. е. $K(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) \leqslant \lambda$, если $K(x, y_1) \leqslant \lambda$, $K(x, y_2) \leqslant \lambda$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$). Эти условия отличны от условий Какутани (Kakutani S., Duke Math. J., 1941, 8, 457—459), и доказательство основывается лишь на классической теореме (Брауэра) о неподвижных точках. *Д. А. Васильков*

1372. О теореме Мазура и Орлича. С и к о р с к и й (On a theorem of Mazur and Orlicz. S i k o r s k i R.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 180—182 (англ.)

Автор дает простое доказательство следующей теоремы Мазура — Орлича (Studia math., 1953, **13**, 137—179). Пусть $w(x)$ означает функционал в линейном пространстве X, удовлетворяющий условиям $w(x_1 + x_2) \leqslant w(x_1) + w(x_2)$, $w(tx) = tw(x)$ для $t \geqslant 0$. Пусть $x(\tau)$ — функция со значениями из X, а $c(\tau)$ — числовая функция, определенные на не-

котором множестве T. Для того чтобы существовал аддитивный и однородный функционал $\xi(x)$ такой, что $\xi(x) \leqslant w(x)$, $\xi(x(\tau)) \geqslant c(\tau)$ для $\tau \in T$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $\tau_i \in T$ и $t_i \geqslant 0$ имело место неравенство $\Sigma_{k=1}^{n} t_k c(\tau_k) \leqslant \leqslant w\left(\Sigma_{k=1}^{n} t_k x(\tau_k)\right)$.

Путем рассмотрения некоторых конусов в пространстве $X \times R$ (R — пространство действительных чисел) автор сводит теорему Мазура — Орлича к теореме Банаха о продолжении дистрибутивных функционалов в линейных пространствах. Одновременно объясняется геометрический смысл условия Мазура — Орлича. *A. Alexiewicz*

1373. Замечание к абсолютному анализу. Невалинна (Bemerkung zur absoluten Analysis. NevanlinnaRolf), Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1954, сер. A1. № 169, 3—7 (нем.)

Пусть L_x^m и L_y^n — евклидовы пространства размерности соответственно m и n, а G_x^m — выпуклая область, $G_x^m \subseteq L_x^m$.

Рассматривается линейный оператор $A(x)$, у которого существует производная A' в смысле Фреше во всех точках области G_x^m (A' — билинейный оператор) и у которого «вихрь» равен нулю:

$$A'h_1h_2 - A'h_2h_1 = 0; \quad h_1, h_2 \in L_x^m.$$

Показывается, что совокупность всех первообразных оператора A в области G_x^m дается формулой

$$\int_{x_0}^{x} A(t)\,dt + C,$$

где линейный интеграл $\int_{x_0}^{x} A(t)\,dt$ не зависит от непрерывного пути в G_x^m. Указывается метод перенесения этой теоремы на произвольные области (вообще говоря, с соответствующими циклическими постоянными) и на случай бесконечномерных пространств. *Л. Д. Кудрявцев*

1374. Резюме основных результатов в теории топологических тензорных произведений и ядерных пространств. Гротендик (Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. Grothendieck A.), Ann. Inst. Fourier, 1952, 4, 73—112 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Тензорное произведение двух локально выпуклых линейных пространств E и F может рассматриваться как пространство $E \otimes F$ билинейных форм над $E' \times F'$ (прямым произведением сопряженных пространств с сильной топологией). В это пространство можно ввести такую локально выпуклую топологию, что для любого локально выпуклого пространства G непрерывным билинейным отображениям $E \times F$ в G взаимно однозначно соответствуют линейные непрерывные отображения $E \otimes F$ в G. При таком соответствии равностепенно непрерывные части пространств отображений также соответствуют друг другу. Если E и F нормированы, то и $E \otimes F$ нормируемо, причем существует единственная норма, при которой описанное соответствие сохраняет норму пространств отображений. Пополнение $E \otimes F$ по описанной топологии обозначается $E \hat{\otimes} F$. Другая топологизация $E \otimes F$ получается, если в $E' \times F'$ рассматривать топологию равномерной сходимости на произведениях равностепенно непрерывных частей в E' и F'. Пополнение по этой топологии обозначается $E \hat{\hat{\otimes}} F$. Существует непрерывное естественное отображение $E \otimes F \to E \hat{\hat{\otimes}} F$. Неизвестно, является ли это отображение взаимно-однозначным. Пусть $\mathbf{M}$ — локально компактное пространство, $C_0(\mathbf{M})$ — пространство непрерывных скалярных функций, обращающихся в нуль на бесконечности, нормированное по равномерной сходимости, и E — локально выпуклое полное пространство. Тогда $C_0(\mathbf{M}) \hat{\otimes} E$ канонически изоморфно пространству $C_0(\mathbf{M}, E)$ непрерывных отображений $\mathbf{M}$ в E, которые равны нулю на бесконечности, с естественной топологией. В частности, $c_0 \hat{\otimes} E$ изоморфно пространству последовательностей из E, сходящихся к нулю (c_0 — одномерное пространство). Если E и F — пространства типа $(\mathscr{F})$ (Dieudonné J., Schwartz L., Ann. Grenoble, 1949, 1, 61—101), то все элементы $E \otimes F$ являются суммами абсолютно сходящихся рядов $u = \Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i$, где x_i и y_i — ограниченные последовательности в E и F и (λ_i) — абсолютно суммируемая последовательность скаляров. Отсюда следует, что на любой локально компактной группе G всякая суммируемая функция f имеет вид $\Sigma \lambda_i g_i * h_i$, где $(\lambda_i) \in l^1$, а (g_i) и (h_i) — ограниченные последовательности в $L^1(G)$. Если u_i — линейное непрерывное отображение E_i в F_i ($i = 1, 2$), то равенство $(u_1 \otimes u_2)(x_1 \otimes x_2) = u_1x_1 \otimes u_2x_2$ определяет отображение $E_1 \otimes E_2$ в $F_1 \otimes F_2$, называемое тензорным произведением u_1 и u_2. Его можно продолжить до отображения $u_1 \hat{\otimes} u_2$ $E_1 \hat{\otimes} E_2$ в $F_1 \hat{\otimes} F_2$ и отображения $u_1 \hat{\otimes} u_2$ $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ в $F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$. Если u_i — топологические изоморфизмы E_i в F_i, то $u_1 \hat{\otimes} u_2$ — топологический изоморфизм $E_1 \hat{\otimes} E_2$ в $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

Если E и F — банаховы пространства, то линейное непрерывное отображение $(x', y) \to x' \otimes y$ пространства $E' \times F$ в пространство $L(E, F)$ непрерывных линейных отображений E в F определяет линейное непрерывное отображение $E' \hat{\otimes} F$ в $L(E, F)$. Образы $E' \hat{\otimes} F$ называются ядерными отображениями E в F. Во всех известных случаях множество ядерных отображений идентично $E' \hat{\otimes} F$. Если E и F — любые локально выпуклые пространства, то линейное отображение u называется ядерным, если может быть представлено в виде $E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$, где E_1 и F_1 — банаховы пространства, β — ядерное отображение, α и γ непрерывны. Ядерные отображения переводят некоторую окрестность нуля в относительно компактное множество. К ядерным отображениям применима теория Фредгольма интегральных уравнений с непрерывным ядром. Указаны также другие топологизации тен-

зорного произведения и связанные с ними классы отображений.

Вторая часть работы посвящена ядерным пространствам, т. е. пространствам, для которых $E \otimes E = F \hat{\otimes} F$ при любом локально выпуклом F. Примером таких пространств является пространство $\mathcal{E}(R^m)$ Лорана Шварца. Условие ядерности пространства эквивалентно следующему: любое линейное непрерывное отображение E в банахово пространство F ядерно. Если E является пространством типа $(\mathscr{F})$ или $(\mathscr{DF})$, то для того чтобы оно было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы E' было ядерным. Подпространства и фактор-пространства ядерных пространств ядерны. $E \otimes F$ ядерно, если E и F ядерны, и т. д. Если E_1 и E_2 — локально выпуклые пространства и F_1, F_2 — ядерные подпространства E_1, E_2, то любая непрерывная билинейная форма на $F_1 \times F_2$ может быть продолжена до билинейной ядерной формы на $E_1 \times E_2$. Указаны некоторые теоремы, вытекающие отсюда для операторов Фредгольма, и приложения к теории распределений. Доказательства отсутствуют.

Н. Я. Виленкин

1375. Обобщение теоремы Рисса — Фишера. Амемия (A generalization of Riesz — Fischer's theorem. Amemiya Ichiro), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 353—354 (англ.)

Доказывается, что линейное нормированное K-пространство полно относительно сходимости по норме, если последняя обладает двумя дополнительными свойствами: 1) $0 \leqslant x \leqslant y$ влечет $\| x \| \leqslant \leqslant \| y \|$, 2) $x_n \geqslant 0$, $x_n \uparrow +\infty$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = +\infty$. Утверждение вытекает из леммы: если выполнены условия 1) и 2), то существует такое $0 < \alpha \leqslant 1$, что для любой возрастающей ограниченной последовательности положительных элементов x_n $\sup\limits_n \| x_n \| \geqslant \alpha \| \sup\limits_n x_n \|$.

А. Н. Балуев

1376. О линейных метрических пространствах. II. Мазур, Орлич (Sur les espaces métriques linéaires (II). Mazur S., Orlicz W.), Studia math., 1953, **13**, 137—179 (франц.)

Обобщение развитой Банахом теории линейных уравнений. Основным результатом работы является создание теории операторных неравенств в линейных пространствах.

В теории Банаха основную роль играет теорема о продолжении дистрибутивных (т. е. аддитивных и однородных) функционалов. Здесь аналогичную роль играет теорема Мазура — Орлича, см. реф. 1372. Множество T и его элементы τ мы обозначаем здесь (следуя авторам) через Λ и λ.

Пусть X — линейное (действительное) пространство с однородной псевдонормой $\| x \|$. Из теоремы Мазура — Орлича следует, что для того чтобы в X существовал линейный функционал $\xi(x)$ с нормой m такой, что $\xi(x(\lambda)) > c(\lambda)$ для $\lambda \in \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $\sum_{k=1}^{n} t_k c(\lambda_k) \leqslant \leqslant m \| \sum_{k=1}^{n} x(\lambda_k) \|$ имело место для произвольных $\lambda_k \in \Lambda$ и $t_k \geqslant 0$. Эта теорема дает сразу: 1) условия существования инвариантных интегралов в некоторых пространствах ограниченных функций — данные ранее Диксмье (Dixmier J., Acta scient. math., 1950, 12, 213—227); 2) условия, необходимые и достаточные для того, чтобы существовала плоскость, содержащая заданное линейное многообразие и лежащая с одной стороны выпуклого множества; 3) условия, необходимые и достаточные для существования плоскости, разделяющей два выпуклых множества.

Пусть S — конус в пространстве X. Он определяет в X частичное упорядочение элементов и частичное упорядочение линейных функционалов. Даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданный (или любой) дистрибутивный функционал, определенный на линейном множестве $R \subset X$, имел неотрицательное продолжение и для того чтобы данный функционал был разностью двух неотрицательных функционалов.

Пусть X и Y — два пространства с однородной псевдонормой и в Y определен частичный порядок (заданием некоторого конуса S). Пусть $F(x)$ обозначает линейный оператор, отображающий X в Y. Авторы дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы операторное неравенство $F(x) \geqslant y$ имело решение для некоторых (или всех) y. Например, если пространства X и Y полны и конус S замкнут, то решение для каждого y существует тогда и только тогда, когда $\| \eta \| \leqslant N \| \Phi(\eta) \|$ для любого неотрицательного на Y функционала η и при некотором N (Φ обозначает оператор, сопряженный с F). Авторы решают также вопрос, когда аналогичное неравенство имеет место для сопряженных операторов. Эти результаты содержат банахову теорию линейных уравнений как частный случай.

Часть работы посвящена операторам в пространствах B_0^*. Авторы дают эффективную форму линейных функционалов в пространствах B_0^*, рассмотренных в качестве примеров в первой части работы (Studia math., 1948, **10**, 184—208), и доказывают, что пространство $C(-\infty, +\infty)$ универсально для сепарабельных пространств типа B_0^*.

Все вопросы, сформулированные выше для пространств с однородной псевдонормой, авторы рассматривают и для пространства типа B_0^*. Доказывается, например, что для того чтобы существовал линейный функционал $\xi(x)$ такой, что $\xi(x(\lambda)) \geqslant \geqslant c(\lambda)$ для $\lambda \in \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $t_{n,k} \geqslant 0$ и $\lambda_{n,k} \in \Lambda$ таких, что $\sum_{k=1}^{p_n} t_{nk} x(\lambda_{nk}) \to 0$, было $\overline{\lim}\ \sum_{k=1}^{p_n} t_{nk} c(\lambda_{nk}) \leqslant 0$.

В частности, вся теория операторных неравенств переносится на пространства B_0.

A. Alexiewicz

1377. Двойственность в теории функций. Кёте (Dualität in der Funktionentheorie. Köthe Gottfried), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1/2, 30—49 (нем.)

Изучаются топологические свойства пространств аналитических функций, а также линейные отображения таких пространств друг в друга. Пусть G — открытое подмножество римановой сферы Ω ($G \neq \Omega$). Обозначим через G^1, G^2, ... последовательность компонент G. Рассматривается пространство $P(G)$ всех локально аналитических в G функций, $x(z) =$

$= \{x_1(z), x_2(z), \ldots\}$ где $x_i(z)$ — функция аналитическая в G^i. Пусть $\overline{G}_n = \overline{G}_n^1 \cup \overline{G}_n^2 \cup \cdots \cup \overline{G}_n^n$, $(\overline{G}_n^i \subset G^i)$ — последовательность возрастающих замкнутых множеств. Положим

$$\| x \|_n = \sup_{z \in G_n} | x(z) |. \qquad (1)$$

Возрастающая последовательность норм, заданных равенствами (1), задает на $P(G)$ топологию, делающую $P(G)$ пространством типа F. То же самое пространство можно рассматривать как топологическое произведение соответствующих пространств, построенных для компонент G: $P(G) = \prod_{i=1}^{\infty} P(G^i)$. Далее рассматривается пространство $R(U)$, где $U \subset \Omega$ — замкнутое множество. Пространство это состоит из всех локально аналитических на U функций (т. е. $u \in R(U)$, если $u(z)$ локально аналитична на некотором, содержащем U, открытом множестве H). Топология в $R(U)$ задается так: $u_n \to u$, если последовательность $u_n(z)$ сходится равномерно к $u(z)$ на некотором открытом множестве $H \supset U$. Основной результат работы — установление двойственности пространств $P(G)$ и $R(\Omega - G)$. Таким образом, пространство $R(\Omega - G)$ совпадает с пространством всех линейных функционалов над $P(G)$ и, наоборот, пространство $P(G)$ совпадает с пространством всех линейных функционалов над $R(\Omega - G)$.

Пусть $u[x]$ — линейный функционал над $P(G)$. Остановимся более подробно на построении функции $\widetilde{u}(\lambda) \in R(U)$ $(U = \Omega - G)$, соответствующей функционалу $u[x]$. Если $x(z) = \{x_1(z), x_2(z), \ldots\}$, то в топологии пространства $P(G)$ $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, а поэтому

$$u(x) = \sum_1^{\infty} u(x_i) = \sum_1^{\infty} u_i(x_i)$$
$$(u_i(x_i) = u(x_i)); \qquad (2)$$

$u_i(x_i)$ — линейный функционал над $P(G^i)$. Доказывается, что в (2) лишь конечное число функционалов u_i, $i = 1, \ldots, m$, может быть отлично от нуля. Для каждого такого u_i определяется функция $\widetilde{u}_i(\lambda) = u_i[1/(z-\lambda)]$ $(x_i(z) = 1/(z-\lambda))$, она является локально аналитической в $U^i = \Omega - G^{(i)}$. Для некоторой системы контуров $C_i \subset G^i \cap H^i$ (H^i — открыто и содержит U^i) получается, что

$$u_i(x_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} x_i(\lambda) \widetilde{u}_i(\lambda)\, d\lambda.$$

Положив $\widetilde{u}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{u}_i(\lambda)$, $C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, получим:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x(\lambda) \widetilde{u}(\lambda)\, d\lambda.$$

Далее изучаются еще некоторые свойства пространств $P(G)$ и $R(\Omega - G)$. Устанавливается также вид линейного непрерывного оператора, отображающего $P(G_1)$ в $P(G_2)$. Оператор имеет вид:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint a(t, z_2)\, x(t)\, dt, \quad t \in G_1, \quad z_2 \in G_2,$$

где функция $a(t, z_2)$ — локально аналитическая по двум переменным. Указывается построение этой функции, аналогичное построению $\widetilde{u}(\lambda)$. Та же формула дает общий вид линейного оператора, действующего из $R(\Omega - G_2)$ в $R(\Omega - G_1)$, нужно лишь интегрировать по другому переменному.

С. Я. Хавинсон

1378. Граничные значения аналитических функций и распределения. Тильман (Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Tillmann Heinz-Günther), Math. Z., 1953, 59, № 1, 61—83 (нем.)

Некоторые результаты Кёте (см. реф. 1377) переносятся на случай аналитических функций многих переменных. Исследуется также ряд вопросов, связанных с теорией распределений Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951). Пусть G — открытое множество в осгудовском пространстве $\Omega^n = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ (Ω_j — риманова сфера) и $P(G)$ — линейное пространство всех локально аналитических в G функций. Топология τ_0 в $P(G)$ задается с помощью последовательности норм: $\| f \|_k = \sup_{z \in G_k} |f(z)|$, где $\overline{G}_1 \subset \overline{G}_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность замкнутых множеств, исчерпывающая G. (Топология τ_0 соответствует равномерной сходимости на каждом замкнутом множестве $F \subset G$.)

Пусть $\mathfrak{M} \subset \Omega^n$ — замкнутое множество. Через $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ обозначается линейное пространство локально аналитических на $\mathfrak{M}$ функций, (т. е. $f(z) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$, если $f(z)$ — локально аналитическая на некотором открытом множестве (зависящем от $f(z)$), содержащем $\mathfrak{M}$).

Пусть $\{\mathfrak{M}_k\}$ — последовательность замкнутых областей, $\bigcap_k \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$. В $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ задается топология τ_1 с помощью системы окрестностей:

$$U_{\{\varepsilon_k\}} = \{f : f = \Sigma \alpha_j f_j;\ \Sigma |\alpha_j| \leqslant 1;\ \sup_{z \in \mathfrak{M}_j} |f_j(z)| \leqslant \varepsilon_j\}.$$

τ_1 оказывается самой «тонкой» (feinste) локально выпуклой топологией в $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$. При этом $f_n \to f$ в τ_1 тогда и только тогда, когда все $f_n(z)$ локально аналитические в некоторой окрестности $\mathfrak{M}$ и равномерно сходятся в ней к $f(z)$.

Первый основной результат автора, обобщающий соответствующий результат Кёте (Köthe) состоит в установлении двойственности пространств $P(G)$ и $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$.

Теорема 1. Пусть $G = D_1 \times \cdots \times D_n$ — открытая цилиндрическая область в Ω^n (D_i — область в Ω_i) и $G^c = CD_1 \times \cdots \times CD_n$. Тогда пространства $P(G)$ и $\mathfrak{U}(G^c)$ двойственны друг к дру-

гу. Двойственность задается с помощью равенства:

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{u} \rangle = x[u] = (-1)^n u(\widetilde{x}) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^*} \cdots \int \widetilde{x}(\eta)\, \widetilde{u}(\eta)\, d\eta$$
$$(\widetilde{u} \in P(G)), \quad \widetilde{x} \in \mathfrak{U}(G^C),$$

где C^* — граница некоторой цилиндрической области G^*, $G^* \subset G$, на которой $\widetilde{x}(\eta)$ еще регулярна. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — простые замкнутые кривые Жордана в замкнутой числовой плоскости, причем каждая часть любой из этих кривых, лежащая в конечном куске плоскости, спрямляема. Каждая C_j разбивает Ω_j на две области: D_j^0 и D_j^1. Пусть $G_\sigma = D_1^{\sigma_1} \times \cdots \times D_n^{\sigma_n}$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_j = 0,1$. Доказывается, что

$$\mathfrak{U}(C) = \mathfrak{U}(C_1 \times \cdots \times C_n) = \sum_\sigma \oplus \mathfrak{U}(\overline{G}_\sigma)$$

(аналог ряда Лорана), а также, что топологические изоморфизмы:

$$\mathfrak{U}'(C) \cong P(C^C), \quad P'(C^C) \cong \mathfrak{U}(C)$$

и $\mathfrak{U}'(\overline{G}_\sigma) \cong P(G_{\sigma'})$, $P(G_\sigma) \cong \mathfrak{U}(\overline{G}_{\sigma'})$ (по всем σ) вытекают один из другого. (В $\sigma' - \sigma_j' \neq \sigma_j$).

Доказывается, что все пространства $\mathfrak{U}(C)$, соответственно $P(C^C)$, у которых одинаковое число из кривых C_j проходит через бесконечно удаленную точку, топологически изоморфны.

Теорема 4. Каждый непрерывный линейный функционал $u[x(z)]$ над $\mathfrak{U}(C)$ есть сильный предел последовательности функционалов $u_r[x]$, для которых соответствующие функции $\widetilde{u}_r(z)$ непрерывны вплоть до C. Функционал $u_r(x)$ определяется по граничным значениям $\widetilde{u}_r(z)$ однозначно. Функционал $u[x]$ возможно понимать также, как обобщенные граничные значения аналитической функции.

Пусть $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ — аналитическая кривая, $p(C)$ — пространство произвольное число раз дифференцируемых на C функций. В $p(C)$ вводится топология с помощью окрестностей:

$$\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon) = \left\{ f(z); \left| \frac{\partial^p f(z)}{\partial z_1^{p_1} \cdots \partial z_n^{p_n}} \right| \leqslant \varepsilon, \text{ для } p \leqslant m, z \in M \right\}$$

M пробегает все ограниченные компактные подмножества C, m — все натуральные числа и ε — все положительные действительные числа. $\mathfrak{A}(C) \subset p(C)$, причем имеет место теорема 6: Топология τ_1 пространства $\mathfrak{A}(C)$ «тоньше» (feiner) топологии τ_p, индуцируемой из $p(C)$.

Теорема 7. $\mathfrak{A}(C)$ плотно в $p(C)$ в топологии τ_p. Каждый непрерывный линейный функционал над $p(C)$ определяет «распределение с компактным носителем» на C. Из предыдущих теорем выводится, что каждое такое распределение T определяет обобщенные граничные значения на C, т. е. линейный функционал $T_1(x)$ над $\mathfrak{A}(C)$. При этом (в силу теоремы 7) T определяется через T_1 однозначно.

Функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ определенная в цилиндре $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ называется медленно растущей к границе G, если

$$|f(z)| \leqslant \frac{M_0}{\delta_1^{\nu_1}(z_1) \cdots \delta_n^{\nu_n}(z_n)}, \text{ где } \nu_j = \begin{cases} 1, & \delta(z_j) > 1, \\ k_j, & \delta_j(z_j) \leqslant 1. \end{cases}$$

$\delta_j(z_j)$ — расстояние z_j до границы G_j.

Теорема 9. «Распределение с компактным носителем» на C есть обобщенное граничное значение аналитической функции, регулярной в цилиндре $G = CC_1^* \times \cdots \times CC_n^*$ и медленно возрастающей к границе G (т. е. к $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$). При этом C_j^* — конечная компактная часть C_j.

Теорема 10. Каждая функция $\widetilde{u}(z_1, \ldots, z_n)$, локально аналитическая и медленно растущая к границе в цилиндрической области $G = CC_1^* \times \cdots \times CC_n^*$, имеет в качестве обобщенных граничных значений на C некоторое «распределение с компактным носителем» (носитель содержится в $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$).

В заключение вводится топология в пространство медленно растущих функций и исследуются некоторые ее свойства. *С. Я. Хавинсон*

1379. Общая спектральная теория в полуупорядоченных линейных пространствах. Аменмия (A general spectral theory in semi-ordered linear spaces. Amemiya Ichirô), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1953, сер. 1, 12, 111—156 (англ.)

Автор рассматривает общее полуупорядоченное линейное пространство R и обобщает некоторые результаты, полученные ранее в предположении, что имеет место условная или σ-условная полнота.

Он определяет спектральное пространство F как множество функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих следующим условиям: для x из R $\varphi(x) = 0, +\infty$ или $-\infty$; $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для $\lambda \neq 0$; $\varphi(x \cup y) = \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$; $\varphi(x) \neq 0$ для некоторого x.

Показывается, что для каждого $a \neq 0$ из R множество V_a функций φ из F, для которых $\varphi(a) \neq 0$, не пусто: если V_a принять за базис открытых множеств, то F становится T_0-пространством в котором V_a будут открытыми компактными множествами (что соответствует стоуновскому включению абстрактного булева кольца в кольцо подмножеств топологического пространства).

Расширения, пополнения, подпространства и фактор-пространства пространства R анализируются с точки зрения спектрального пространства. Обобщается построенная Накано теория относительного спектра.

R изоморфно пространству точечных функций тогда и только тогда, когда спектральное пространство удовлетворяет некоторым дополнительным условиям; R изоморфно пространству ограниченных точечных функций тогда и только тогда, когда R допускает функцию $\|a\|$ такую, что $0 < \|a\| < \infty$ для каждого $a \neq 0$; $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$; из неравенства $|a| \leqslant |b|$ следует $\|a\| \leqslant \|b\|$ и $\|a \cup b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ для положительных a и b.

Теоремы компактификации и расширения точечных пространств, полученные Стоуном, Чехом и Хьюиттом, изучаются с точки зрения спектральных

пространств. Последняя глава посвящена таким R, которые являются одновременно кольцами.

I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 137.

1380. Вращения типа свертки в гильбертовом пространстве и в множестве опорных областей плоскости. Инцингер (Drehungen vom Faltungstypus im Hilbertschen Raum und in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene. Inzinger Rudolf), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 354—360 (нем.)

Операция свертывания

$$y(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t(\varphi - \lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda \qquad (t, x, y \in L^2(0, 2\pi))$$

может быть записана с использованием координат в виде

$$\eta_\nu = \tau_\nu \xi_\nu \qquad (|\nu| = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где

$$\tau_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t(\varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi; \quad \xi_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi;$$

$$\eta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi \qquad (|\nu| = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если в качестве τ_ν взять произвольный набор комплексных чисел ($\tau_{-\nu} = \overline{\tau_\nu}$), то формула (1) определит в $L^2(0, 2\pi)$ линейный оператор T, называемый оператором типа свертки. Если $|\tau_\nu| = 1$, то оператор T оказывается унитарным и называется вращением типа свертки.

Сопоставляя функции $a(\varphi)$ из $L^2(0, 2\pi)$ плоскую область A, для которой данная функция является опорной, автор рассматривает множество H всех таких областей как гильбертово пространство. Указываются геометрические свойства операторов вращения типа свертки, трактуемых как операторы в пространстве H. Особое внимание уделяется при этом операторам — преобразованиям Кэли оператора дифференцирования (с периодическими граничными условиями) — и их произведениям. *Г. П. Акилов*

1381. Символическое исчисление в коммутативных алгебрах. Валбрук (Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. Waelbroeck Lucien), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 5, 556—558 (франц.)

Рассматривается коммутативная полная топологическая алгебра A с единицей в локально выпуклой хаусдорфовой топологии. Элемент $a \in A$ называется регулярным, если $(a - s)^{-1}$ существует при всех достаточно больших s и представляет собой функцию от s, ограниченную в окрестности бесконечно удаленной точки. Далее, спектром $\mathrm{sp}\, a$ элемента a называется пересечение компактных множеств, вне которых $(a - s)^{-1}$ ограничен. Спектром $\mathrm{sp}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ системы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элементов $a_k \in A$ называется множество всех систем $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ комплексных чисел s_k таких, что $P(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathrm{sp}\, P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для любого полинома P от n переменных; при $n = 1$ это определение спектра эквивалентно исходному.

Основной результат: существует одно и только одно непрерывное представление при помощи элементов $a \in A$ алгебры $\mathscr{H}(\mathrm{sp}\, a_1, \ldots, a_n)$ всех функций, аналитических на $\mathrm{sp}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, при котором функции z_k отвечает a_k, а константе 1 отвечает единица алгебры A.

Обратно, пусть S — рационально выпуклое компактное множество такое, что существует непрерывное представление указанного типа алгебры $\mathscr{H}(S)$ при помощи элементов $a \in A$. Тогда $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — система регулярных элементов, спектр которой содержится в S. Образ функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в A в этом представлении обозначается $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; оказывается, что для $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ имеют место обычные правила символического исчисления. Доказательства отсутствуют; автор указывает, что им использованы результаты Ока (Oka K., Bull. Soc. math. France, 1950, 78, 1—28) и А. Картана (Cartan H., Bull. Soc. math. France, 1950, 78, 29—64) по арифметической теории алгебр аналитических функций. *М. А. Наймарк*

1382. Алгебры с непрерывным обратным. Валбрук (Les algèbres à inverse continu. Waelbroeck Lucien), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 6, 640—641 (франц.)

Продолжая исследование, начатое в предыдущей заметке (см. реф. 1381), автор рассматривает локально выпуклые полные коммутативные топологические алгебры A с единицей, обладающие следующим свойством: в A существует окрестность единицы такая, что каждый элемент a из этой окрестности имеет обратный a^{-1}, причем отображение $a \to a^{-1}$ непрерывно при $a = 1$; такие алгебры автор называет алгебрами с непрерывным обратным.

На алгебры с непрерывным обратным переносятся многие предложения теории нормированных колец. Так, кольцо вычетов алгебры A по ее максимальному идеалу изоморфно телу комплексных чисел.

Для функций $f(a)$, $a \in A$ и $f(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ вводится понятие производной, частных производных и голоморфной функции. При этом оказывается, что если D — область в n-мерном комплексном пространстве, D^* — совокупность элементов алгебры A^n, спектр которых содержится в D, и $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — функция, голоморфная в D, то $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (см. реф. 1381) есть голоморфная функция в D^*. *М. А. Наймарк*

1383. Структура алгебр с непрерывным обратным. Валбрук (Structure des algèbres à inverse continu. Waelbroeck Lucien), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 7, 762—764 (франц.)

Результаты, полученные автором в его двух предыдущих заметках (см. реф 1381, 1382), применяются к дальнейшему изучению алгебр A с непрерывным обратным.

Семейство $a = (a_i)_{i \in I}$ автор называет системой аналитических образующих алгебры A, если всякий элемент из A есть аналитическая функция конечного числа a_i.

Спектр такого семейства a определяется как проективный предел спектров конечных подсистем $a_d = (a_i)_{i \in d}$, где d пробегает конечные подмноже-

ства в I. Оказывается, что спектр любого семейства аналитических образующих гомеоморфен спектру A в смысле Гельфанда, т. е. надлежащим образом топологизированной совокупности всех максимальных идеалов в A.

По семейству $a=(a_i)_{i\in I}$ строится алгебра H, являющаяся индуктивным пределом алгебр $\mathscr{H}(\mathrm{sp}\,a_d)$ аналитических функций на спектре a_d, снабженным наиболее сильной топологией, при которой естественное отображение $\mathscr{H}(\mathrm{sp}\,a_d)$ в H непрерывно. Если при этом в H не выполнена аксиома отделимости, то H заменяется фактор-алгеброй, пополнение которой, если она не полна, автор обозначает $\mathscr{H}(\mathrm{sp}\,a)$ и называет алгеброй аналитических функций на спектре a.

Основной результат:

Всякая алгебра A с непрерывным обратным алгебраически изоморфна фактор-алгебре алгебры аналитических функций на спектре по замкнутому идеалу функций, равных нулю на спектре. *М. А. Наймарк*

1384. Об одной теореме приведения некоторых представлений симметрической группы. Гамба, Радикати (Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico. Gamba Augusto, Radicati Luigi), Atti Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 5, 632—634 (итал.)

Указан способ приведения произведения двух неприводимых представлений симметрических групп S_n и S_m к неприводимому представлению группы S_{n+m}. Рассмотрен лишь случай, когда неприводимые представления определены разбиением $\{n-1,1\}$, что наиболее интересно с точки зрения физических приложений. (По поводу используемых методов см., например, Вейль Г., Классические группы, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1947, гл. IV, § 2. *Прим. реф*).

Отмечается, что характер, соответствующий разбиению $\{\mu_1,\mu_2,\ldots\}$ $(\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots)$ для класса, содержащего α_1 циклов порядка 1, α_2 циклов порядка 2 и т. д., есть функция μ и α: $\chi_n(\mu_1,\mu_2,\ldots,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, где $n=\sum_k\mu_k$.

Затем вводится ряд операторов, действующих на χ_n:

$$D\chi_n=\begin{cases}\chi_n, \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots & \text{(регулярное разбиение)},\\ 0 & \text{(нерегулярное разбиение)},\end{cases}$$

$$\Delta^{\pm}_{\mu_k}\chi_n=\chi_n(\ldots,\mu_k\pm1,\ldots;\alpha_1,\alpha_2,\ldots),$$

$$B\chi_n=\chi_n(\ldots;\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots),$$

$$A^{\pm}=\sum_k\Delta^{\pm}_{\mu_k}.$$

Эти операторы обладают следующими очевидными свойствами:

$$D^2=D,\ DA^+DA^--DA^-DA^+=[B,A^{\pm}]=$$
$$=[B,D]=0.$$

Далее в этих обозначениях выражаются характеры представления симметричной группы S_n порядка $n!$ в функциях характеров представления группы S_{n-1} для всех классов, содержащих по крайней мере один цикл порядка k.

Так как $DA^-B\chi_n=\chi_n$ для $\alpha_1\neq0$, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\chi_n(n-1,1;\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\,\chi_n(\mu_1,\mu_2,\ldots;\alpha_1,\alpha_2)=$$
$$=(\alpha_1-1)\,\chi_n=(DA^+DA^--1)\,\chi_n.$$

Методом полной индукции это доказывается для классов, содержащих по крайней мере один цикл порядка 1 $(\alpha_1\neq0)$:

$$\chi_{n+1}(n,1;\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\,\chi_{n+1}(\mu_1,\mu_2,\ldots;\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots)=$$
$$=(DA^-B\chi_{n+1}(n,1;\alpha_1,\alpha_2,\ldots))\times$$
$$\times(DA^-B\chi_{n+1}(\mu_1,\mu_2,\ldots;\alpha_1,\alpha_2,\ldots))=$$
$$=(\alpha_1-1)(DA^-B\chi_{n+1}(\mu_1,\mu_2,\ldots;\alpha_1,\alpha_2,\ldots))=$$
$$=(DA^+DA^--1)\,\chi_n.$$

Доказательство для других классов с $\alpha\neq0$ ведется аналогично, что и доказывает теорему о характерах. *А. А. Б.*

1385. Теория характеров. I. Унитарные алгебры. Годман (Théorie des caractères. I. Algèbres unitaires. Goodement Roger), Ann. Math., 1954, 59, № 1, 47—62 (франц.)

Ассоциативная алгебра $\mathbf{A}$ над полем комплексных чисел, в которой определены инволюция $Sx=x^*$ и эрмитово-положительное скалярное произведение (x,y), называется унитарной алгеброй, если для всех x,y,z из $\mathbf{A}$: 1) $(xy,z)=(y,x^*z)$, 2) $(x,y)=(y^*,x^*)$, 3) оператор U_x: $y\to xy$ непрерывен в $\mathbf{A}$, 4) элементы вида xy всюду плотны в $\mathbf{A}$ (ср. Рохлин В. А., Докл. АН СССР, 1948, 59, 643—646). $\mathbf{A}$ можно вложить в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, распространив на $\mathfrak{H}$ оператор U_x и инволюцию S. Положим $V_x=SU^*_xS$. Для того чтобы ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ принадлежал слабо замкнутому кольцу, порожденному V_y, необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал со всеми U_x. Элемент a в $\mathfrak{H}$ называется ограниченным, если существует такой ограниченный оператор U_a, что $U_ax=V_xa$ для всех $x\in\mathbf{A}$. Следом в кольце операторов $\mathbf{M}$ (слабо замкнутом и содержащем единицу) называется функция $\mathrm{Tr}(H)$, определенная на множестве $\mathbf{M}_+$ положительно эрмитовых элементов, принимающая значения в $[0,\infty]$ и такая, что 1) $\mathrm{Tr}(UHU^{-1})=\mathrm{Tr}(H)$ для всех унитарных операторов U из $\mathbf{M}$, 2) $\mathrm{Tr}(H)=\sum\mathrm{Tr}(H_\alpha)$, если $H\in\mathbf{M}_+$ сумма сильно сходящегося ряда $\sum H_\alpha$, $H_\alpha\in\mathbf{M}_+$. Оператор $A\in\mathbf{M}$ нормирован, если $\mathrm{Tr}(A^*A)<\infty$. Пусть из $\mathrm{Tr}(H)=0$ следует $H=0$ при $H\in\mathbf{M}_+$. Тогда алгебра $\mathbf{M}_2$ нормированных относительно Tr операторов с естественной инволюцией $A\to A^*$ и скалярным произведением $\mathrm{Tr}(B^*A)$ является унитарной алгеброй. Всякая унитарная алгебра вкладывается каноническим образом в алгебру построенного вида. Точнее, если $\mathbf{R}^s$ — кольцо операторов, порожденное U_x, то на $\mathbf{R}^s$ существует единственный след Tr, для которого 1) из $\mathrm{Tr}(H)=0$ следует $H=0$ при $H\in\mathbf{M}_+$, 2) $A\in\mathbf{R}^s$ нормировано тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}=U_a$ для некоторого ограниченного элемента $a\in\mathfrak{H}$, 3) $\mathrm{Tr}(U_aU_b^*)=(a,b)$ для любой пары ограниченных элементов a и b из $\mathfrak{H}$. Такой след называется каноническим. Для того чтобы на $\mathbf{R}^s$ не было других следов, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{R}^s$ было фактором. В этом случае алгебра $\mathbf{A}$ назы-

вается неприводимой. Пусть **A** — самосопряженная алгебра операторов и $\mathbf{M}=\mathbf{A}''$ — порожденное ею кольцо операторов, причем 1° **M** — сильное замыкание **A**, 2° **M** является фактором, не принадлежащим типу III, 3° $\mathrm{Sp}(A^*A)<\infty$ для всех $A\in\mathbf{A}$, где Sp — относительный след на **M**. Тогда **A** с естественной инволюцией и скалярным произведением $(A, B)=\mathrm{Sp}(AB^*)$ является неприводимой унитарной алгеброй.

Н. Я. Виленкин

1386. Максимальные абелевы подкольца в факторах конечного типа. Диксмье (Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini. Dixmier J.), Ann. Math., 1954, 59, № 2, 279—286 (франц.)

В факторе **M** класса II_1 рассматривается максимальное коммутативное подкольцо $\mathbf{M}_1$ и множество $\mathbf{P}_0$ всех конечных сумм $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i U_i$, где U_i — унитарные операторы из **M** такие, что $U_i\mathbf{M}_1U_i^{-1}=\mathbf{M}_1$. Автор называет $\mathbf{M}_1$ регулярным, если замыкание **P** множества $\mathbf{P}_0$ совпадает с **M**, полурегулярным, если $\mathbf{P}$ — фактор, и сингулярным, если $\mathbf{P}=\mathbf{M}_1$. Автор доказывает, что: 1. В аппроксимативно конечном факторе существуют максимальные коммутативные регулярные подкольца, максимальные коммутативные полурегулярные нерегулярные подкольца и максимальные коммутативные сингулярные подкольца.

2. Существует фактор **M** класса II_1, содержащий два сингулярных максимальных коммутативных подкольца, которые не сопряжены друг к другу *-автоморфизмом кольца **M**. Из этих результатов следует, что в аппроксимативно конечных факторах существует *-автоморфизм, не являющийся внутренним.

М. А. Наймарк

1387. Об α-соответствующих операторах в волновой механике. Морель-Виар (Les opérateurs α-correspondants en mécanique ondulatoire, Morel-Viard), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 9, 992—994 (франц.)

С целью построения волновой механики, удовлетворяющей принципу относительности Галилея, вводится понятие эквивалентности, названное автором α-соответствием. Пусть α — вещественная функция координат и времени; волновая функция Φ называется α-соответствующей волновой функции φ ($\Phi\approx_\alpha\varphi$), если $\Phi=e^{i\alpha}\varphi$. Далее оператор B называется α-соответствующим оператору A, если $B=e^{i\alpha}Ae^{-i\alpha}$.

Автор формулирует ряд очевидных свойств α-соответствия и находит выражение для функции α, при помощи которой удовлетворяется принцип относительности Галилея для волнового уравнения и для оператора количества движения.

М. А. Наймарк

1388 К. Избранные страницы общего анализа. Фреше (Pages choisies d'analyse générale. Fréchet Maurice, Collect. logique math., ser A. 3, 213 pp. Paris, Gauthier-Villars, 1953) (франц.)

В книге собраны выдержки из ранее опубликованных работ Фреше, которые в совокупности составляют довольно связное изложение некоторых вопросов общего анализа. В первой главе, сравнительно небольшой по объему (8 страниц), изложены высказывания автора о множествах, содержащиеся в его докладе на конгрессе математиков (Atti Congresso Internat. Mat., vol. 1, Bologna, 1928, 267—274), в связи с рассмотрением классического анализа, функционального анализа и общего анализа.

Во второй главе рассмотрены функциональные пространства. В первых параграфах этой главы вводятся аксиомы метрических пространств и изучаются различные виды сходимости функций. Подробно рассмотрены понятия сходимости по мере и метрика пространства сходимости по мере. Далее изложен вопрос о компактных множествах измеримых функций (в смысле метрики сходимости по мере), о компактных множествах в пространствах L^p (упоминается о работах А. Н. Колмогорова, И. Тамаркина и М. Рисса) и о компактных множествах голоморфных функций (в смысле метрики Фреше). В последних параграфах этой главы рассмотрены следующие вопросы: об инвариантном задании кривой в пространстве трех измерений, о расстоянии между кривыми, необходимые и достаточные условия сходимости последовательности кривых, о компактных множествах кривых Жордана, о поверхностях Жордана.

В третьей главе рассмотрены различные вопросы функционального анализа. Эта глава содержит разделы A, B, C и D. В разделе A рассмотрен вопрос о площади поверхности. В разделе B рассмотрены линейные и билинейные функционалы. Дано представление линейных функционалов в пространстве L^2 (это было опубликовано автором в 1907 г.: Trans. Amer. Math. Soc., 1907, 8, 433—446) и билинейных функционалов в пространстве C (Trans. Amer. Math. Soc., 1915, 16, 215—234). Дано распространение на случай кратных интегралов понятия интеграла Стильтьеса. В разделе C рассмотрены непрерывные функционалы в пространствах l_2, L^2, C и в пространстве Фреше и сделаны замечания о возможности разложения непрерывных функционалов в ряд по некоторым многочленам и о представлении (в пространстве C) непрерывных функционалов в виде предела кратного интеграла. В разделе D подробно рассмотрено понятие дифференциала функционала, заданного в метрическом пространстве E. В том случае, когда $E=C$, выводится формула Лагранжа и доказывается, что в экстремальных точках функционала его дифференциал равен нулю. Рассмотрены дифференциалы высших порядков, установлено условие симметрии второго дифференциала и дано разложение функционала в строку Тейлора. Помимо понятия дифференциала функционала, подробно изучен дифференциал функции многих переменных как в смысле Штольца — Юнга, так и в смысле Адамара (Scripta Univ. Ab. Bib. Hierosolymitanarum, Jérusalem, 1923); доказана эквивалентность этих двух понятий. Изучен дифференциал функционала в смысле Поля Леви и введено понятие дифференциала Адамара для функционалов.

В четвертой главе (всего 10 страниц) сделано несколько замечаний об абстрактных пространствах.

Основным вопросом последней (пятой) главы служит понятие дифференциала (в смысле Фреше) от операторов, действующих из одного нормированного пространства в другое нормированное пространство. Дано необходимое и достаточное условие

постоянства оператора. Изучен вопрос о дифференциалах высших порядков. Введено понятие оператора n-го порядка, как оператора $F(x)$, у которого $(n+1)$-разность равна нулевому элементу пространства: $\Delta_{n+1}\Delta_n \ldots \Delta_1 F(x) = \theta$ для любого x пространства E. В этой главе вводится понятие интеграла Стилтьеса от ограниченных и неограниченных функционалов, заданных в абстрактном пространстве. В последнем параграфе этой главы рассмотрены асимптотически почти периодические преобразования и их приложение к эргодической теореме.

М. М. Вайнберг

1389 К. Введение в теорию меры и интеграла. Мунро (Introduction to measure and integration. Munroe M. E., 310 pp., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass. 1953) (англ.)

Учебник для университетов; содержит краткое изложение основных понятий теории меры и интеграла Лебега, элементы теории множеств и некоторые сведения из функционального анализа. Первая глава содержит основы теории множеств, определения функции, метрического пространства, предела. Вторая глава посвящена общей теории меры (на основе понятия внешней меры). Мера Лебега — Стильтьеса изложена в гл. III. Далее (гл. IV) следуют основные сведения об измеримых функциях, включая теоремы Егорова и Лузина). В гл. V излагается теория интеграла Лебега. Первоначально интеграл определяется для функций, принимающих лишь конечное число значений, а затем, с помощью предельного перехода, и для всех суммируемых функций. В гл. VI рассматриваются различные виды сходимости: сходимость в среднем, сходимость по мере, сходимость почти всюду и т. д., и связь между ними. Здесь же излагаются некоторые сведения из функционального анализа: неравенства Гельдера и Минковского, пространства L_p, линейные функционалы в банаховых пространствах, теорема Риса — Фишера, эргодическая теорема Неймана и др. Последняя глава книги посвящена основам современной теории производной. Книга написана доступно, однако ряд разделов (понятие мощности, метрические пространства, определение вероятности и др.) изложены несколько отрывочно и формально.

С. В. Фомин

1390 Д. Полуупорядоченные кольца самосопряженных операторов. Любовин В. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1954

См. также: 1140 К, 1166, 1208, 1214, 1233, 1237, 1238, 1239, 1272, 1479.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1391. Способы вычисления вероятности. Цветаев К., Воен. вестник, 1953, № 13, 53—57

Статья посвящена методике элементарного преподавания теории вероятностей. Автор исходит из представления о вероятности как о «числе, около которого колеблется устойчивая частота массового случайного события» и считает, что даже наиболее элементарное изложение теории вероятностей должно вестись на основе явно сформулированных аксиом, как это было предложено в статье Н. Краснера (РЖМат, 1954, 3012). При этом в качестве реальной мотивировки общепринятого выбора аксиом предлагается предварительное рассмотрение свойств частот. Приведенные в статье примеры могут представлять некоторый интерес и для преподавателя теории вероятностей за пределами специально военных учебных заведений. Не освещен в статье вопрос о способах разъяснения в начальном курсе различия между понятиями вероятности и частоты и о зависимости степени устойчивости частот (в случае независимых испытаний с постоянной вероятностью) от размеров серий. Неудачно указание, будто бы на основе данных табл. 1 за вероятность попадания «может быть принято любое число между 0,87 и 0,9» (т. е. между максимумом и минимумом частот в рассмотренных восьми сериях).

А. Н. Колмогоров

1392. Теория вероятностей и математический анализ. Кантелли (Calcolo delle probabilità e analisi matematica. Cantelli Francesco Paolo), Atti IV conrg. Unione mat. ital., 1953, **1**, 17—26 (итал.)

1393. Флюктуации и необратимые процессы. Онсагер, Мачлуп (Fluctuations and irreversible processes. Onsager L., Machlup S.), Phys. Rev., 1953, **91**, № 6, 1505—1512 (англ.)

Пусть $\alpha(t)$ — стационарный марковский гауссовский процесс, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{R\alpha} + s\alpha = \varepsilon, \qquad (1)$$

где R и s — константы, $\varepsilon(t)$ — «абсолютно случайная» функция с нулевым средним значением («производная» от винеровского процесса). В таком случае плотность вероятности перехода от значения $\alpha^{(1)}$ в момент t к значению $\alpha^{(2)}$ в момент $t+\tau$ будет равна

$$f\left(\begin{matrix}\alpha^{(2)} \\ t+\tau\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha^{(1)} \\ t\end{matrix}\right) = \frac{s}{(2\pi)^{1/2} k\,(1-e^{-2\gamma\tau})^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{s}{2k}\frac{[\alpha^{(2)} - e^{-\gamma\tau}\alpha^{(1)}]^2}{(1-e^{-2\gamma\tau})}\right\}, \qquad (2)$$

где $\gamma = s/R$, k — некоторая константа. Доказывается, что эта же вероятность перехода может быть определена (с точностью до нормировочного множителя) из соотношения

$$f\left(\begin{matrix}\alpha^{(2)} \\ t+\tau\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha^{(1)} \\ t\end{matrix}\right) \sim \exp\left\{-\frac{1}{4k}\left(\int_t^{t+\tau} R[\dot{\alpha}(t) + \gamma\alpha(t)]^2\,dt\right)_{\min;\ \alpha(t)=\alpha^{(1)},\ \alpha(t+\tau)=\alpha^{(2)}}\right\} \qquad (3)$$

(знак min; $\alpha(t) = \alpha^{(1)}$, $\alpha(t+\tau) = \alpha^{(2)}$ означает, что берется минимум соответствующего функционала

относительно $\alpha(t)$ при указанных условиях). Отсюда немедленно вытекает, что для многомерного стационарного марковского гауссовского процесса $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\}$ удовлетворяющего системе уравнений

$$R\dot{\alpha} + s\alpha = \varepsilon, \text{ т. е. } \sum_j (R_{ij}\dot{\alpha}_j + s_{ij}\alpha_j) = \varepsilon_i, \quad (4)$$

где $R = \{R_{ij}\}$ и $s = \{s_{ij}\}$ — симметричные матрицы, причем s — положительно определенная, а $\varepsilon = \{\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t)\}$ — «абсолютно случайное» слагаемое, компоненты которого после перехода к системе координат, в которой матрицы R и s диагональны, оказываются некоррелированными; плотность вероятности перехода определяется из соотношения

$$f\begin{pmatrix}\alpha^{(2)} & \alpha^{(1)}\\ t_2 & t_1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \exp\left\{-\frac{1}{4k}\left(\int_{t_1}^{t_2} F(\alpha, t)\,dt\right)_{\min;\ \alpha(t_1)=\alpha^{(1)},\ \alpha(t_2)=\alpha^{(2)}}\right\}, \quad (5)$$

где

$$F(\alpha, t) = 2\Phi\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) + 2\Psi(X, X) - 2\frac{dS(\alpha)}{dt}$$

и

$$S(\alpha) = S_0 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} s_{ij}\alpha_i\alpha_j,$$

$$\Phi\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ij}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j, \quad (6)$$

$$\Psi(X, X) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{ij}X_iX_j$$

(S_0 — произвольная константа, $L = R^{-1}$, $X = s\alpha$). Для безусловной плотности распределения вероятностей значений α в p моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_p$ могут быть получены аналогичные выражения

$$f\begin{pmatrix}\alpha^{(1)} & \ldots, & \alpha^{(p)}\\ t_1 & \ldots, & t_p\end{pmatrix} \sim \exp\left\{\frac{1}{2k}\left[S(\alpha^{(1)}) + S(\alpha^{(p)}) - \right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_{t_1}^{t_p} (2\Phi(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + 2\Psi(X, X))\,dt\right)_{\min;\ \alpha(t_1)=\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha(t_p)=\alpha^{(p)}}\right]\right\}. \quad (7)$$

При некоторых предположениях последнюю формулу можно также представить в виде

$$f\begin{pmatrix}\alpha^{(1)} & \ldots, & \alpha^{(p)}\\ t_1 & \ldots, & t_p\end{pmatrix} \sim \exp\left[-\frac{1}{4k}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} [2\Phi(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\Psi(X, X)]\,dt\right)_{\min;\ \alpha(t_1)=\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha(t_p)=\alpha^{(p)}}\right]. \quad (7a)$$

Большая часть статьи посвящена приложению полученных соотношений к вопросам физической кинетики. Уравнения типа (4) описывают флюктуации макроскопических переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в физических системах, находящихся в состоянии, отличном от термодинамического равновесия; при этом роль $S(\alpha)$ играет энтропия системы, $X_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ является термодинамической силой, возвращающей систему в состояние равновесия, $\Phi = \frac{1}{2}\sum R_{ij}\dot{\alpha}_i\dot{\alpha}_j$ есть диссипативная функция, а $\Psi(X, X) = \Phi(\dot{\alpha}, \alpha)$, если пренебречь в (4) правой частью (см., например, Гуревич Л. Э., Основы физической кинетики, ГТТИ, М. — Л., 1940; Onsager L., Phys. Rev., 1931, **37**, 405; **38**, 2265).

Равенство (7) или (7а) связывает вероятность данной «траектории» в пространстве состояний системы с соответствующей диссипативной функцией (подобно тому, как стационарная вероятность отдельного состояния системы в силу теоремы Больцмана выражается через ее энтропию). Отсюда немедленно вытекает также общий принцип минимума диссипации, обобщающий аналогичный гидродинамический принцип, принадлежащий Релею (Rayleigh, Philos. Mag., 1913, **26**. 776); более сложное обоснование этого общего принципа содержится также в первой из цитированных выше более ранних статей Онсагера. *А. М. Яглом*

1394. Флюктуации и необратимый процесс. II. Системы с кинетической энергией. Мачлуп, Онсагер (Fluctuations and irreversible process. II. Systems with kinetic energy. Machlup S., Onsager L.), Phys. Rev., 1953, **91**, № 6, 1512—1515 (англ.)

Рассматриваются физические системы, флюктуации в которых описываются системой уравнений

$$m\ddot{\alpha} + R\dot{\alpha} + s\alpha = \varepsilon, \quad (1)$$

где m, R и s — постоянные квадратные матрицы, $\alpha(t)$ и $\varepsilon(t)$ — n-мерные векторы, $\varepsilon(t)$ — «чисто случайный» импульс («системы с инерцией»; ср. с уравнением (4) предыдущего реферата). Исходя из онсагеровского принципа микроскопической обратимости (см. работы Онсагера и книгу Л. Э. Гуревича, цитированные в предыдущем реферате, где подробно разобран случай систем без инерции), доказывается, что матрица R симметрична (более аккуратное математическое доказательство того же факта содержится в работе референта (Яглом А. М., Матем. сб., 1949, 24(66), № 3, 457—492)). Далее для $2n$-мерного марковского случайного процесса $(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$, описываемого системой (1), доказываются соотношения, полностью аналогичные соотношениям (7) и (7а) предыдущего реферата; доказательство здесь оказывается более сложным, чем в предыдущем случае, так как три квадратные матрицы m, R и s уже нельзя одновременно привести к диагональному виду (в отличие от двух матриц R, s). В заключение кратко поясняется физический смысл полученного результата (ср. заключительную часть предыдущего реферата). *А. М. Яглом*

1395. Эргодическая теория марковских цепей, допускающих бесконечную инвариантную меру. Харрис, Роббинс (Ergodic theory of Markov chains admitting an infinite invariant measure. Harris T. E., Robbins

Herbert), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 8, 860—864 (англ.)

Пусть на действительной прямой R задана однородная цепь Маркова и пусть $H(u, B)$ обозначает вероятность перейти за один шаг из состояния $u \in R$ в борелевское множество $B \subset R$. Предполагается, что существует определенная на семействе борелевских множеств мера $\pi(B)$, не равная тождественно нулю и такая, что $\pi(B) < +\infty$ для любого ограниченного множества B и

$$\pi(B) = \int_R H(u, B)\,\pi(du). \qquad (1)$$

Обозначим через Ω множество траекторий системы:

$\Omega = \{x\}$, где $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$, $x_i \in R$.

Мера π индуцирует естественным образом меру m, определенную на минимальном борелевском теле подмножеств Ω, содержащем все цилиндрические множества. Мера m инвариантна относительно преобразования сдвига T:

$$Tx = x', \text{ где } x'_i = x_{i-1}.$$

Изучается динамическая система, порожденная преобразованием T.

Назовем борелевское множество B u-возвратным, если система, находящаяся в начальный момент в состоянии u, посетит B с вероятностью 1 бесконечное число раз. Вводятся условия: I. Каждое борелевское множество B u-возвратно при почти всех (в смысле π) $u \in B$; II (более сильное). Каждое B с $\pi(B) > 0$ u-возвратно при почти всех $u \in R$. Показывается, что условие I достаточно для того, чтобы динамическая система не содержала диссипативной части ненулевой меры, а условие II достаточно для того, чтобы она была метрически транзитивна. Из общей теории динамических систем выводится, что если выполнено условие II и $h(u)$, $k(u)$ — π-суммируемые функции, причем $\int_R k(u)\,\pi(du) \neq 0$, то с вероятностью 1 существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(x_0) + \ldots + h(x_n)}{k(x_0) + \ldots + k(x_n)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,\pi(du)}{\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\,\pi(du)}. \qquad (2)$$

Далее развитая теория применяется к цепи Маркова, образованной последовательностью сумм $s_n = y_1 + \ldots + y_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин y_i. Предполагается, что последовательность $\{s_n\}$ интервально-возвратна, т. е. что для любого интервала I с вероятностью 1 s_n бесконечное число раз попадает в I (условия интервальной возвратности изучены Чжуном и Фуксом (Chung K. L., Fuchs W. H. J., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6, 1—12). Ими показано, например, что для интервальной возвратности последовательности $\{s_n\}$ достаточно, чтобы распределение величин y_i не было решетчатым и существовало $My_i = 0$). Тогда за π можно взять лебегову меру. Утверждается, что если s_n интервально-возвратны, то для почти всех a с вероятностью 1 существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} h(a + s_j)}{\sum_{j=1}^{n} k(a + s_j)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\,du}. \qquad (3)$$

Если при каком-нибудь n функция распределения величины s_n имеет абсолютно непрерывную компоненту, то (3) верно для всех a. Приводится аналогичная теорема для решетчатых случайных величин.

Вопрос об условиях существования бесконечной инвариантной меры не рассматривается. Доказательства только намечены. *Р. Л. Добрушин*

1396. Одно свойство нормального распределения. Лукач, Кинг (A property of the normal distribution. Lukacs Eugene, King Edgar), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 389—394 (англ.)

В работе рассматриваются линейные формы

$$Y_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s X_s \text{ и } Y_2 = \sum_{s=1}^{n} b_s X_s$$

от независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, причем эти случайные величины не предполагаются одинаково распределенными. При условии, что у каждой случайной величины X_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ существует момент n-го порядка, доказывается следующая теорема. Для того чтобы линейные формы Y_1 и Y_2 были статистически независимыми, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(A) Все те случайные величины, коэффициенты при которых отличны от нуля в обеих формах, распределены нормально.

(B) $\sum_{s=1}^{n} a_s b_s \sigma_s^2 = 0$, где σ_s^2 — дисперсия случайной величины X_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Эта теорема была доказана при более общих условиях (существования моментов у случайных величин X_s не предполагалось) референтом (Изв. АН СССР, сер. матем., 1954. 18, 185—200). *В. П. Скитович*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1397. Эвристический метод для построения критериев проверки гипотез и его использование в многомерной корреляции. Рой (On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. Roy S. N.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 2, 220—238 (англ.)

Рассматриваются два эвристических принципа для построения критериев проверки статистических гипотез. Доказывается, что конструкции критических множеств, вытекающие из второго принципа, тождественны с теми, к которым приводит метод отношения правдоподобия. Применительно к многим классическим задачам первый и второй принципы дают одинаковые результаты; в ряде иных случаев автор обнаруживает, что первый принцип приводит к более простым конструкциям и оценкам, чем второй.

Библиография, 15 названий. *Н. В. Смирнов*

1398. Таблицы симметрических функций. IV. Дейвид, Кендалл (Tables of symmetric functions. Part IV. David F. N., Kendall M. G.), Biometrika, 1953, **40**, № 3—4, 427—446 (англ.)

Продолжение составленных авторами таблиц коэффициентов, позволяющих производить преобразования различных типов симметрических функций одного и того же веса (до веса равного 12 включительно). В настоящей работе публикуются таблицы, при помощи которых осуществляется представление однородных типов данного веса через элементарные симметрические функции и совершаются обратные преобразования. Указываются некоторые возможные приложения к задачам распределения. *Н.В. Смирнов*

1399. Последовательные способы оценки. Анскомб (Sequential estimation. Anscombe F. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **B15**, № 1, 1—29 (англ.)

Первая часть работы содержит обзор литературы о последовательных способах оценки. Во второй части содержатся новые результаты автора о последовательной оценке неизвестных параметров распределения для следующих двух задач:

1) последовательная оценка (типа доверительного интервала с заданными длиной и коэффициентом доверия) среднего значения нормальной совокупности с неизвестной дисперсией (или разности средних значений двух таких совокупностей), 2) последовательная оценка (точечного типа с заданной стандартной ошибкой) параметров процесса рождения и гибели.

Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую функцию распределения с ограниченным четвертым моментом и содержащую абсолютно непрерывную часть; $z_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$; $f_r(n) = c_r n^{\beta}(1+b_r/n+O(n^{-3/2}))$ — семейство функций ($r = 1, 2, \ldots, \beta \neq 1$; последовательность $\{b_r\}$ ограничена при $r \to \infty$; $c_r \to 0$ при $\beta > 1$ и $c_r \to \infty$ при $\beta < 1$). N_r — случайная величина, равная при $\beta > 1$ ($\beta < 1$) наименьшему n, для которого $z_n \leqslant f_r(n)$ (соответственно $z_n \geqslant f_r(n)$). Налагая ряд дополнительных ограничений, автор находит асимптотическое (при $r \to \infty$) представление для распределения величины N_r. Этот общий результат является основным для решения сформулированных выше задач, которое представлено в виде правил прекращения наблюдений после достижения выборочной кривой определенной границы и последующего использования соответствующих статистик для оценки параметров. Итоги обсуждения статьи приведены в виде десяти отзывов (стр. 21—29).

Библиография, 50 названий. *В. С. Михалевич*

1400. Оценки и информация в стационарных временных рядах. Уитл (Estimation and information in stationary time series. Whittle P.), Arkiv mat., 1953, **2**, № 5, 423—434 (англ.)

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ — наблюденные значения N последовательных элементов вещественной стационарной случайной последовательности. Предполагается, что эта последовательность является гауссовской, имеет равное нулю среднее значение, абсолютно дифференцируемую спектральную функцию $F(y)$, всюду отличную от нуля спектральную плотность $\frac{dF(y)}{dy} = \Lambda(e^{iy})$ и является регулярной в смысле А. Н. Колмогорова (Изв. АН. СССР, сер. матем., 1941, 5, №1, 3—14), так что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \log \Lambda(z)\,\frac{dz}{z} = \log A > -\infty. \qquad (1)$$

В предыдущей работе автора (Hypothesis testing in time series analysis, Uppsala, 1951) было доказано, что при этих условиях плотность распределения вероятностей для вектора X в случае, когда N велико, может быть приближенно (с точностью до «краевых эффектов», следующих из конечности выборки) представлена формулой

$$f(x) = (2\pi A)^{-N/2}\exp\{X'[\Lambda(W)]^{-1}X/2\}, \qquad (2)$$

где A определяется из (1), штрих у X означает транспозицию одностолбцовой матрицы, а $\Lambda(W)$ есть результат подстановки «циклической» матрицы $W = (\delta_{i+1,j} + \delta_{iN}\delta_{j1})$ вместо z в разложение функции $\Lambda(z)$, $z = e^{iy}$, в ряд Лорана. В случае, когда спектральная плотность $\Lambda(e^{iy})$ задается заранее с точностью до численного значения некоторых параметров, развитая теория дает (в предположении, что $N \gg 1$) оценки наибольшего правдоподобия для всех этих параметров, причем параметр A (определяющий средний квадрат ошибки экстраполирования последовательности на шаг вперед) оказывается играющим особую роль: максимальное значение «функции правдоподобия» (2) выражается через одну только оценку $\hat{A}$ этого параметра, но для получения $\hat{A}$ приходится предварительно строить оценки всех остальных параметров. Отмечается, что если и не предполагать исходную последовательность гауссовской, то полученные оценки все равно будут обладать некоторыми оптимальными свойствами (в смысле метода наименьших квадратов).

Второй раздел работы посвящен перенесению известных свойств оценок наибольшего правдоподобия для ряда независимых наблюдений на случай выборки из стационарно связанной последовательности. Доказывается, что оценки наибольшего правдоподобия параметров гауссовской стационарной последовательности, построенные в первом разделе работы, будут (при некоторых мало существенных ограничениях общего характера) состоятельными и асимптотически эффективными. Это доказательство осуществляется при помощи сведения к схеме независимых случайных величин (а именно, устанавливается, что распределение вероятностей для рассматриваемых оценок совпадает с соответствующим распределением для оценок наибольшего правдоподобия в случае выборки из некоторой совокупности независимых величин), причем существенно используются результаты, полученные в цитированной выше более ранней работе автора.

В третьем разделе результаты второго раздела и известные результаты Фишера, касающиеся матрицы вторых моментов для оценок наибольшего правдоподобия в случае ряда независимых наблюдений, применяются для вычисления матрицы вторых моментов подобных же оценок параметров гауссовской стационарной последовательности. Оказы-

вается, что оценка параметра A некоррелирована с оценками остальных параметров и имеет дисперсию, равную $2A^2/N$ (т. е. зависящую только от самого параметра A); матрица же вторых моментов оценок остальных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ обратна матрице

$$\frac{N}{2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\partial \log M(z)}{\partial \theta_j}\,\frac{\partial \log M(z)}{\partial \theta_k}\,\frac{dz}{z}\right], \qquad (3)$$

$$M(z) = \frac{\Lambda(z)}{A}$$

(аналогичной «матрице информации» Фишера), т. е. зависит только от $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$, но не от A.

В заключение рассматривается один конкретный пример, который используется для выяснения вопроса о возможности практического использования упрощенных оценок параметра A, не требующих предварительного вычисления оценок наибольшего правдоподобия всех остальных параметров.

А. М. Яглом

1401. Эквивалентность оптимальных преобразователей и достаточных и наиболее эффективных статистик. Престон (The equivalence of optimum transducers and sufficient and most efficient statistics. Preston Glenn W.), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 7, 841—844 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении преобразования, применение которого к случайному процессу $y(t) = s(t) + n(t)$ ($s(t)$ — «сигнал», $n(t)$ — «шум») дает наилучшее приближение к процессу $s(t)$ (задача о фильтрации случайного процесса). Указывается, что поскольку такое преобразование обычно является элементом системы связи, предназначенной для передачи информации, то от оптимального преобразователя надо требовать, чтобы его применение не уменьшало количества информации (в смысле Шеннона) относительно $s(t)$, содержащегося в процессе $s(t) + n(t)$.

Отмечается, что результат применения преобразования к некоторой реализации случайного процесса является полным аналогом статистики в том смысле, как понимается это слово в применении к конечному числу наблюденных значений случайной величины. При этом, согласно Кулбеку и Лейблеру (Kulback S., Leibler R. A., Ann. Math. Statistics, 1951, **22**, 79—87), требование, чтобы преобразование не приводило к потере информации, эквивалентно требованию, чтобы соответствующая статистика была достаточной. Требование же минимальности отклонения преобразованного процесса $s(t) + n(t)$ от $s(t)$ (особенно если измерять это отклонение его дисперсией) аналогично требованию, чтобы рассматриваемая статистика (точнее, оценка $s(t)$, даваемая этой статистикой) была наиболее эффективной.

Известно, что в случае конечного числа независимых наблюдений случайной величины, эффективная оценка параметра, входящего в выражение плотности распределения вероятностей для этой величины, может быть получена (если только такая оценка существует) с помощью метода наибольшего правдоподобия; эта оценка будет одновременно и достаточной (см., например, Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948). Автор излагает метод, аналогичный методу наибольшего правдоподобия, для нахождения оценки процесса $s(t)$ по значениям суммы $s(t) + n(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ в предположении, что $s(t)$ и $n(t)$ являются независимыми между собой стационарными гауссовскими случайными процессами с нулевым средним значением и известными корреляционными функциями; в этой части работы приведенные рассуждения не являются строгими и не достаточно убедительны. Указывается, что получаемая таким образом оценка $s(t)$ при не слишком малом T практически совпадает с оценкой, получаемой при оптимальной линейной фильтрации процесса $s(t) + n(t)$ с бесконечно большим временем запаздывания (по поводу такой фильтрации см., например, обзор референта в Успехах матем. наук, 1952, **7**, № 5 (51)). Так как оценка наибольшего правдоподобия в рассматриваемом случае должна быть эффективной и достаточной, то отсюда заключается, что применение оптимального линейного фильтра с бесконечным запаздыванием здесь не приводит к потере информации.

А. М. Яглом

ТЕОРИЯ ИГР

1402. Математические методы и математический аппарат в экономике. Херстейн (Some mathematical methods and techniques in economics. Herstein I. N.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 249—262 (англ.)

Обзор вопросов экономического характера, где находят применение различные области современной математики, ориентирован в основном на математиков.

В качестве примера применения классического аппарата дифференциального исчисления приводится вывод уравнений Е. Слуцкого (Slutsky E., Giorn. economisti, 1915, **60**, 19—23), относящихся к «теории поведения потребителя». Отмечается, что, начиная с конца 30-х годов, в исследованиях по экономике используются более современные математические средства.

В качестве иллюстрации рассматривается, наряду с выводом уравнений «Экономики благосостояния», использующим аппарат дифференциального исчисления, абстрактная трактовка той же экстремальной проблемы и анализ ее, основанный на теории выпуклых множеств. Попутно отмечается возникшая в связи с этими вопросами чисто математическая проблема характеристики условий, при которых данное абстрактное упорядочение может быть реализовано посредством некоторой вещественной функции; последней занимались Эйленберг (S. Eilenberg) и др.

Далее отмечается ряд вопросов, где находит применение теория матриц, в частности теоремы Фробениуса. Среди них рассматриваются уравнения международной торговли (в некоторой формализации этого вопроса), некоторые частные случаи проблемы перемещения масс, и проблема «личного предпочтения», математически состоящая в нахождении такой перестановочной матрицы P, для которой след матрицы AP максимален (A — заданная матрица). Последняя проблема рассматривается на основе теории игр Неймана. Ряд других вопросов лишь перечисляется.

Библиография, 54 названия. *Л. В. Канторович*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

1403. Значение статистики для физики. Браунбек (Die Bedeutung der Statistik für die Physik. Braunbek Werner), Kosmos, 1953, 49, № 9, 416—418 (нем.)

Популярная статья, дающая общее представление о математической статистике и ее приложениях в классической и современной атомной физике.

С. К.

1404. О статистической оценке средней продолжительности жизни. Бартлет (On the statistical estimation of mean life-times. Bartlett M. S.), Philos. Mag., 1953, сер. 7, 44, № 350, 249—262 (англ.)

Обсуждаются статистические методы оценки средней продолжительности жизни неустойчивых частиц в камере Вильсона для распадающихся частиц и для случая, когда нераспадающиеся частицы могут быть обнаружены. *Из резюме автора*

1405. Статистические критерии обнаружения последовательности импульсов на фоне шума. I. Мидлтон (Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise. I. Middleton David), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 4, 371—378 (англ.)

Рассматривается задача об обнаружении последовательности импульсов на фоне шума по n наблюдениям электрического напряжения, равного либо чистому шуму, либо сумме шума и импульса (сигнала). С математической точки зрения это типичная задача выбора между двумя статистическими гипотезами при двух альтернативах H_0 (отсутствие сигнала) и H_1 (его присутствие). Пусть α — вероятность ошибки первого рода (т. е. вероятность ложного обнаружения сигнала), β — вероятность ошибки второго рода (пропуска сигнала). При определении критической области в пространстве наблюдений можно поступать, например, одним из следующих способов:

1) заранее фиксировать число наблюдений n и α и требовать, чтобы β была минимальной (обычный метод Неймана — Пирсона проверки гипотез),

2) требовать, чтобы при фиксированном n минимальной была сумма $\alpha+\beta$ или же сумма $p\beta+q\alpha$, где p и q — априорные вероятности присутствия и отсутствия сигнала, предполагающиеся известными (метод «идеального наблюдателя» Лаусона и Уленбека, см. «Пороговые сигналы», Изд-во «Советское радио», 1952, гл. VII, § 5) и

3) заранее выбрать и α и β, но наблюдения продолжать до тех пор, пока мы не сможем гарантировать, что вероятности ошибок не превосходят выбранных значений (метод типа «последовательного анализа» Вальда; число наблюдений n в этом случае является случайной величиной). При всех указанных методах определения критической области основную роль играет отношение правдоподобия

$$\Lambda_n(R_k) = pW_n(R_k \mid H_1) / qW_n(R_k \mid H_2),$$

где $W_n(R_k \mid H_i) = W_n(R_1, \ldots, R_n \mid H_i)$ — плотность распределения вероятностей в пространстве $(R_1, \ldots, R_n)$ (здесь $R_k = R(t_k)$ — исследуемое напряжение в k-ый момент наблюдения t_k) при гипотезе H_i, $i = 0,1$; если p и q неизвестны, то полагаем $p = q$. В случае метода Неймана — Пирсона уравнение границы критической области в пространстве наблюдений, как известно, имеет вид $\Lambda_n = K$, где постоянная K определяется из условия, чтобы вероятность ошибки первого рода равнялась α, в случае «идеального наблюдателя» уравнение границы этой области имеет тот же вид, но с $K = 1$; наконец, в случае метода типа «последовательного анализа» пространство $(R_1, \ldots, R_n)$ разбивается на три области: $\Lambda_n < K_1 = \beta/(1-\alpha)$, $K_1 < \Lambda_n < K_2 = (1-\beta)/\alpha$ и $\Lambda_n > K_2$, после чего наблюдения продолжаются до тех пор, пока точка $(R_1, \ldots, R_n)$ не попадет в первую область (в этом случае принимается гипотеза H_0) или же в третью (принимается H_1).

В соответствии с обычно применяемой на практике процедурой считается, что $R(t)$ — амплитуда огибающей случайного процесса, получаемого при пропускании исследуемого напряжения через узкополосный фильтр (относительно понятия огибающей случайного процесса см.: Райс С., статья в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, или Бунимович В. И., «Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах», Изд-во «Советское радио», 1951); частота наблюдений считается совпадающей с частотой повторений сигнала и много меньше, чем обратная величина «времени затухания корреляции» шума на выходе фильтра, так что результаты n наблюдений можно считать независимыми случайными величинами. Если $\sqrt{\psi}$ есть среднее квадратичное значение шума на выходе фильтра, а $a_0\sqrt{2\psi}$ — максимальная амплитуда сигнала, то плотность распределения вероятностей для $R(t)$ при гипотезах H_0 и H_1 будет равна:

$$W_1(R \mid H_0) = R\psi^{-1} \exp\left[-R^2/2\psi\right],$$

$$W_1(R \mid H_1) = R\psi^{-1} \exp\left[-a_0^2 - R^2/2\psi\right] I_0\left(\sqrt{2}\, a_0 R/\sqrt{\psi}\right)$$

(см. формулы (3.7—9) и (3.10—11) цитированной выше статьи Райса), откуда

$$\Lambda_n = pq^{-1} \exp\left(-na_0^2\right) \prod_{l=1}^{n} I_0(2a_0 r_l), \quad r_l = R_l/\sqrt{2\psi}.$$

Следовательно, в случае методов Неймана — Пирсона и «идеального наблюдателя» мы должны принять или отвергнуть гипотезу в зависимости от знака неравенства

$$\sum_{l=1}^{n} \log I_0(2a_0 r_l) \lessgtr K',$$

где K' — некоторая постоянная, а в случае «последовательного анализа» — продолжать наблюдения до тех пор, пока сумма $\sum_{l=1}^{n} \log I_0(2a_0 r_l)$ не выйдет за пределы одной из двух заданных линейных функций от n. Таким образом, обнаружение сигнала проще всего осуществляется, если после узкополос-

ного фильтра поместить нелинейный детектор с характеристикой

$$I(t)_{\text{вых.}} = C \log I_0 (A\psi^{-1} R(t)) \text{ при } R > 0,$$

$$I(t)_{\text{вых.}} = 0 \text{ при } R < 0,$$

где $I(t)_{\text{вых.}}$ — ток на выходе детектора, A — пиковая амплитуда импульса. При $a_0 \ll 1$ соответствующий детектор почти квадратичен; в этом случае критерий Неймана — Пирсона является равномерно наиболее мощным (относительно a_0). *А. М. Яглом*

1406. **Статистические критерии обнаружения последовательности импульсов на фоне шума. II.** Мидлтон (Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise. II. Middleton David), J. Appl. Phys., 1953, 24, № 4, 379—391 (англ.)

Подсчитываются вероятности α и β ошибки первого и второго рода, а также общая вероятность $W = p(1-\beta) + q(1-\alpha)$ выбора правильной гипотезы, для трех методов проверки гипотезы о наличии сигнала, описанных в первой части статьи (реф. 1405). Приведенные вычисления близки по типу к тем, которые содержатся в книге «Пороговые сигналы» (см. гл. VII, § 5 этой книги), цитированной в указанном выше реферате. Явные формулы для α, β и W удается получить в предположении, что сигнал слабый (т. е. $a_0 \ll 1$) и $n \gg 1$; в случае метода типа «последовательного анализа», где n является случайной величиной, приходится еще предположить, что распределение вероятностей для n имеет некоторый простой вид (в работе вычисления проводятся в предположении несобственного и гауссовского распределений). Оказывается, что при $a_0 \ll 1$ величина W зависит только от $a_0^2\sqrt{n}$; при $a_0 \gg 1$ она зависит лишь от $a_0^2 n$.

В заключение рассматривается вопрос о практическом использовании полученных результатов; в этой связи поясняется практический мысл вероятностей ошибок α и β, даются рекомендации по выбору значений α (в случае метода Неймана — Пирсона) и α и β (в случае метода типа «последовательного анализа» и вводится понятие «минимального обнаружимого сигнала». Для некоторых частных значений вероятностей α, или соответственно α и β, строятся графики зависимости W от $a_0^2\sqrt{n}$ (в предположении, что $a_0 \ll 1$ и $p = q = 1/2$) и сравниваются результаты, получаемые при применении трех рассмотренных методов. *А. М. Яглом*

1407. **Приложение теории стохастических процессов к изучению невоспроизводимых химических реакций и ядерных процессов.** Сингер (Application of the theory of stochastic processes to the study of irreproducible chemical reactions and nucleation processes. Singer K.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **B15**, № 1, 92—106 (англ.)

Приводится расчет нескольких примеров стохастических процессов, которые могут служить схемой некоторых реакций. Например, изучается стохастический процесс размножения частиц двух типов T_1 и T_2. За время dt с вероятностью $a\,dt$ возникает одна частица типа T_1. Одна частица типа T_1 превращается за время dt в одну частицу типа T_1 и одну частицу типа T_2 ($T_1 + T_2$) с вероятностью $b\,dt$, превращается в $2T_1 + T_2$ с вероятностью $c\,dt$ и исчезает с вероятностью $f dt$. Превращения частиц происходят независимо друг от друга и от возраста частиц. В этом случае производящая функция

$$G(z_1, z_2; t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P(n_1, n_2; t)\, z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

вероятностей $P(n_1, n_2; t)$ того, что в момент времени t имеется n_i частиц типа T_i, $i = 1, 2$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a(z_1 - 1)\, G + b(z_2 - 1)\, z_1 \frac{\partial G}{\partial z_1} + c(z_1 z_2 - 1)\, z_1 \frac{\partial G}{\partial z_1} + f(1 - z_1) \frac{\partial G}{\partial z_1}.$$

Этот процесс в случае $a = 0$ является ветвящимся случайным процессом (см. Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А., Докл. АН СССР, 1947, 56, 5—8). *Б. А. Севастьянов*

1408. **Стохастическая задача, связанная с работой счетчиков.** Рамакришнан, Матьюс (A stochastic problem relating to counters. Ramakrishnan Alladi, Mathews P. M.), Philos. Mag., 1953, 44, № 357, 1122—1128 (англ.)

Рассматривается счетчик, регистрирующий некоторые события (попадания частиц), распределенные во времени по закону Пуассона. При анализе работы такого счетчика обычно предполагается, что после каждой регистрации события счетчик перестает работать (запирается) на постоянное «время разряда» a (Гнеденко Б. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1941, 11, № 1, 101—106) или что после каждого события счетчик запирается на постоянное время a (Feller W., Courant Anniversary Volume, 1948, 105—115).

В реферируемой работе рассматривается более общий случай, когда после каждого незарегистрированного события счетчик запирается на постоянное время b, а после каждого зарегистрированного — на постоянное время $a \neq b$; при этом предположении подсчитывается вероятность $\pi(n, t)$ того, что за время t счетчик зарегистрирует ровно n событий. Приведенное решение использует методы, рассмотренные одним из авторов в ряде более ранних работ (Ramakrishnan A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, 46, 595; 1952, 48, 451; J. Roy Statist. Soc., 1951, B13, 131) в связи с некоторыми другими теоретико-вероятностными задачами, связанными с исследованием космических лучей. *А. М. Я.*

1409. **Выборочный контроль в производстве.** Натх (Sampling inspection in production engineering. Nath Pran), J. Instn Engrs (India), 1953, 34, № 2, 283—295 (англ.)

1410. **Оценка ошибки в гранулометрическом анализе.** Гриффитс (Estimation of error in grain size analysis. Griffiths J. C.), J. Sediment. Petrol., 1953, 25, № 2, 75—84 (англ.)

См. также: 1076, 1109

ГЕОМЕТРИЯ

1411. О делении угла. Лоран (Sur la section de l'angle. Lorent H.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, 5 сер., № 12, 1027—1040 (франц.)

Для решения задачи о делении данного угла на три равных части автор предлагает кривые

$$y^2 = x^2(4x - 3a)/(4x - a), \quad (1)$$

$$y^2 = x^2(x - a)/(3x - a). \quad (2)$$

Каждая из этих кривых есть геометрическое место вершин A треугольника ABC, который деформируется так, что его углы удовлетворяют равенству $A = \lambda(B - C)$ ($\lambda = \text{const}$), вершина B находится в начале координат и сторона $BC = a = \text{const}$ лежит на положительной полуоси абсцисс. Кривая (1) соответствует значению $\lambda = 2$, а кривая (2) — значению $\lambda = 3$. При $\lambda = 2$ углы треугольника ABC удовлетворяют условию $3A + 4C = 2\pi$, вследствие которого построение угла $C/3$ сводится к построению угла $A/4$. При $\lambda = 3$ соответственно имеем $4A + 6C = 3\pi$. Случай $\lambda = 5$ приводит к кривой пятого порядка. *Л. Л. Вербицкий*

1412. О квадратурах Порта плоских фигур, ограниченных кривыми линиями. Гофман (Über Portas Quadratur krummlinig begrenzter ebener Figuren. Hofmann Jos. E.), Arch. internat. histoire sci., 1953, **6**, № 23—24, 193—208 (нем.)

Джамбаттиста делла Порта (1538—1615), известный как писатель в области естествознания, является также автором небольшой математической работы «Elementa curvilineorum», существующей в двух изданиях: 1601 г. (Неаполь) и 1610 г. (Рим).

Дается описание работы Порта. Приводится его классификация треугольников и углов — прямолинейных, криволинейных и смешанных,— причем играет также роль направление выпуклости кривых. Строится круг, площадь которого в 2, 3, 5, 7 и, наконец, в n раз больше площади данного круга.

Порта перефразирует некоторые предложения Евклида (книга II, предложения 2, 3, 5, 6), касающиеся сумм и разностей площадей прямоугольников, распространяя их на площади, ограниченные кругами. Далее Порта изучает площади фигур, ограниченных различными комбинациями прямолинейных отрезков и круговых дуг. *Н. М. Бескин*

1413. Некоторые теоремы о конических сечениях. Кеймир (Some theorems on conics. Camier E. D.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 18—25 (англ.)

Геометрическое место точек, из которых касательные к коническому сечению Σ гармонически разделяются касательными к коническому сечению Σ', есть, вообще говоря, коническое сечение K, называемое гармоническим местом кривых Σ и Σ'. В работе доказывается четырнадцать теорем о метрических свойствах гармонических мест; например, если гармоническое место кривых Σ и Σ' есть окружность, то центры Σ и Σ' изогонально сопряжены относительно каждого из четырех треугольников, образованных общими касательными Σ и Σ'. При этом две точки M_1 и M_2 называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если направленные расстояния x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 этих точек от сторон треугольника удовлетворяют условию $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$. *Л. Л. Вербицкий*

1414 К. Специальный курс тригонометрии. Новоселов С. И. (Пособие для пед. ин-тов), 459 стр., Советская наука, М., 1953, 9 р. 60 к.

1415 К. Сборник геометрических задач на построение с решениями. Александров И. И. (Пособие для учителей средней школы), изд. 19-е, 176 стр., Учпедгиз, М., 1954, 3 р. 70 к.

1416 К. Аналитическая геометрия для изучающих технику и для самообразования. Гесс (Analytische Geometrie für Studierende der Technik und zum Selbststudium. Hess Adolf, VI + 124 S., 105 Textabb., Springer Verlag, Berlin, 1954, 4.80 DM.), Neue Bücher, 1953, Nov., Dez., **1**, 25 (библ.)

1417 К. 150 упражнений по аналитической геометрии, полностью решенных векторными методами. Валенте (150 esercizy di geometria analitica completamente risolti col metodo vettoriale. Valente Guerino, 156 + IV, Torino, v. Giorgio (lit.), 1953, L. 900), Bibliogr. ital., 1953, № 8, 363 (библ.)

1418 К. Аналитическая геометрия. Конфорто (Geometria analitica. Conforto Fabio, 301 p., Ed. Docet (Tip. V. Ferri), Roma, 1953, 2.800 L.), Bibliogr. ital., 1953, № 632, 538 (библ.)

1419 К. Лекции по аналитической геометрии. Т. I. Геометрия на плоскости. Т. II. Геометрия в пространстве. Броман (Föreläsningar över analytisk geometri. Bd. I. Geometri i planet. Bd. II. Geometri i rummet. Broman Arne, 3-e uppl., Bd. I — 182 S., Bd. II — 106 S., 1953, Duplic 18, Göteborg), Svensk bokhandel, 1953, № 47, 811 (библ.)

1420 К. Аналитическая геометрия. 2. Чех (Analytická geometrie. 2. Cech E., 300 s., 140 Kčr.), Новые книги, 1/53, 2 (библ.)

1421 К. Аналитическая геометрия. Лея (Geometria analyticzna. Leja E., Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1953, 6.17 rb., 1,55 doll.), Biul. eksportowy, 1953, 4/5, 15 (библ.)

1422 К. Учебник геометрии. I. Аналитическая геометрия. Фабрициус-Бьерре (Laerebog i geometri. I. Analytisk geometri. Fabricius-Bjerre Fr., 2 udgave, 169 s., Jul. Gjellerups Forlag, København, 1953, 24.00 Kr.), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 4, 170 (библ.)

1423 К. Геометрия в пространстве. Шут, Шерк, Портер (Solid geometry. Shute William G., Shirk William W., Porter George F., VII + 280 pp., Ameri-

can Book Co., New York, 1954, 2.48 doll.), Math. Teacher, 1954, **47**, № 2, 128 (библ.)

1424 К. **Общая геометрия. Менгер** (Géométrie générale. Menger Karl, 83 p., Gauthier-Villars, Paris, 1954, 1000 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 2, 31 (библ.)

1425 К. **Кривизна и числа Бетти. Яно, Бохнер** (Curvature und Betti numbers. Yano Kentaro, Bochner Salomon, IX, 3-190 pp., Princeton (N. J.), London, Oxford U. P., 1953, 20 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 127, 6 (библ.)

1426 РЕЦ. **Трисекция угла. Брейденбах** (Die Dreiteilung des Winkels. Breidenbach W., 54 s., B. G. Teubner, Leipzig, 1951, 2.60 f.) [**Рецензия: Вен** (Veen S. C. van), Nieuw arch. wiskunde, 1953, **1**, сер. 3, № 2, 154 (нем.)]

1427 РЕЦ. **Динамическая (активная) геометрия в пространстве. Сколник, Хартли** (Dynamic solid geometry. Skolnik David, Hartley Miles C., VIII + 321 pp., D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1952, 2.48 doll.) [**Рецензия: Рид** (Read Cecil B.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 468, 583 (англ.)]

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1428. **Аналогия между законом распространения света в изотропных сплошных преломляющих средах и конформным преобразованием. Марусси** (Un'anologia fra le leggi della propagazione della luce in mezzi rifrangenti continui isotropi, e le rappresentazioni conformi. Marussi Antonio), Atti Fondaz «Giorgio Ronchi», 1953, **8**, № 1, 44—48 (итал.)

Если обозначить через $m = d\bar{s}/ds$ модуль деформации конформного преобразования пространства S в пространство $\bar{S}$ и предположить, что точка $\bar{P}$ перемещается в $\bar{S}$ со скоростью $c = d\bar{s}/dt$, то скорость v ее изображения P в пространстве S будет

$$v = \frac{ds}{dt} = mc.$$

Существует тесная аналогия между свойствами конформных преобразований и законами распространения света в сплошной неоднородной среде, так как и здесь имеет место формула $v = c/n$, которая, если положить $m = 1/n$, принимает точно такой же вид. Этот же вывод вытекает из более глубокого анализа принципа Ферма.

Каждое свойство конформных преобразований имеет свой аналог в оптике. Например, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет изображение геодезической линии, имеет своим аналогом в оптике формулу Эйлера, определяющую траекторию луча в неоднородной среде.

Из вариационного принципа Гамильтона — Гельдера, выражаемого уравнением

$$\delta \int_A^B \sqrt{2(U+E)}\, ds = 0,$$

вытекает определение пучка траекторий, для которых постоянная энергия равна нулю, так что выполняется условие

$$\delta \int_A^B \sqrt{2U}\, ds = 0.$$

Полагая $\sqrt{2U} = 1/m = n$, получаем следующую аналогию: в конформном преобразовании с модулем m изображения геодезических линий подобны таким же траекториям материальной точки, на которую действует сила, вызываемая потенциалом $U = 1/(2m)$, при нулевом значении энергии; они подобны траекториям светового луча, распространяющегося в изотропной неоднородной среде с показателем преломления $n = 1/m$. *Г. С.*

1429. **Влияние двух одинаковых цилиндрических отверстий на распределение напряжений в балке под действием постоянного изгибающего момента. Сенгупта** (The effect of two equal circular holes on the stress distribution in a beam under uniform bending moment. Sengupta A. M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, **45**, № 2, 65—68 (англ.)

Для решения поставленной задачи автор использует биполярные координаты. *С. И. Зетель*

1430. **О так называемом законе кристаллографической симметрии. Белов Н. В.,** Докл. АН СССР, 1953, **88**, № 1, 63—65

Предложено общее доказательство закона кристаллографической симметрии (т. е. положения о невозможности в кристаллах осей 5-го, 7-го и более высоких порядков), вытекающее из того, что каждый узел решетки является центром симметрии. Теорема может быть высказана и в такой форме: в пространственной решетке старшая ось (т. е. ось наивысшего порядка, безразлично, поворотная или зеркальная) всегда будет четного порядка L_{2n}, причем $2n$ не может быть больше 6. *Е. Р.*

1431 К. **Векторные методы в приложении к дифференциальной геометрии, механике и теории потенциала. Резерфорд** (Vector methods appliedo t differential geometry, mechanics and potential theory. Rutherford Daniel Edwin, VIII + 135 p., Oliver and Boyd, Edinburgh, London, Interscience Publishers, New York, 1954, 6 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 218, 11 (библ.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1432. **О спрямлении окружности, предельной линии и эквидистанты. Сас** (Über die Rektifikation des Kreises, des Grenzkreises und der Abstandslinie. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 3—4, 251—253 (нем.; резюме рус.)

Доказывается, что длина ломаной $AP_1P_2 \ldots P_{n-1}B$, вписанной в дугу AB окружности, стремится к определенному конечному пределу, если наибольшая из дуг AP_1, $P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$ стремится к нулю. Доказательство не зависит от аксиомы параллельности. Отсюда при стремлении длины дуги окружности,

ориципикла или эквидистанты к нулю, отношение длины дуги к хорде стремится к единице.

В. П. Белоусова

1433. К интерпретации геометрии Лобачевского. Дорфман А. Г., Уч. зап. Сталингр. пед. ин-та, 1953, № 3, 52—61

Автор приводит интерпретацию гиперболической плоскости на арифметизированной евклидовой прямой R, дополненной несобственной точкой, исходя из плоской интерпретации Пуанкаре.

Вводятся понятия «точка» и «прямая» как сегмент $[a.\ b] \subset R$ и интервал $(a,\ b) \subset R$.

Инцидентность «прямых» $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ обусловливается неравенствами $a < c < b < d$ или $c < a < d < b$; инцидентность «точки» $[\xi,\ \eta]$ прямой $(a,\ b)$ — условием

$$(b - \xi)(\xi - a) = \eta^2.$$

Наконец, «точка» $B \equiv [\xi_2,\ \eta_2]$ лежит на прямой между точками $A \equiv [\xi_1,\ \eta_1]$ и $C \equiv [\xi_3,\ \eta_3]$, если $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ или, при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$, если $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$.

Эти определения гарантируют выполнимость аксиом первых двух групп из гильбертовой системы аксиом. Затем вводятся понятия длины отрезка и величины угла.

На доказательстве выполнимости аксиом конгруентности III, 4 и III, 5 автор не останавливается.

Понятие «движения» вводится как преобразование сегментов

$$\text{I. } \xi' = \xi + a, \quad \eta' = \eta,$$
$$\text{II. } \xi' = r\xi, \quad \eta' = r\eta, \quad r > 0.$$
$$\text{III. } \xi' = -\delta\xi, \quad \eta' = -\delta\eta, \quad \delta = (\xi^2 + \eta^2)^{-1}.$$

Проверяется, что «движения» сохраняют инцидентность, «расстояния», «углы». На аксиомах непрерывности и параллельности автор не останавливается.

З. А. Скопец

1434. Перспектива по принципу угловых определений. Барышев Д. Г., Науч. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1953, **14**, 99—116

Работа посвящена вопросу о корректировании изображений в центральной проекции при достаточно больших углах зрения («широкоугольная перспектива»). Необходимость такого корректирования или исправления изображений вызывается тем, что при построении их по правилам линейной перспективы изображения в некоторых своих частях получаются не соответствующими наблюдаемым в натуре. Автор рассматривает различные способы корректирования, такие как «расщепление точки зрения», применение сферической поверхности, применение конхоиды Никомеда. Далее показано построение других вспомогательных кривых, названных автором «кривыми соответствия». При помощи конхоиды Никомеда и «кривых соответствия» могут быть построены сетки, которые используются для выполнения изображений в зависимости от требований, предъявляемых к последним. В конце работы приложена сравнительная таблица различных видов изображений и приемов их корректирования.

Н. Ф. Четверухин

1435. Параллельное проектирование геометрических образов, заданных ортогональными проекциями, непосредственно на плоскость общего положения. Виницкий П. Г., Тр. Саратовск. автомоб. дор. ин-та, 1953, № 12, 250—257

Рассматриваются элементарные задачи начертательной геометрии на пересечение прямых и плоскостей и на определение натуральной фигуры плоского сечения многогранника.

Н. Ф. Четверухин

1436 К. Аксонометрия. Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., 291 стр., Гостехиздат, М., 1953, 7 р. 80 к.

Книга состоит из двух частей. Первая часть (гл. I—IV) написана Н. Ф. Четверухиным, вторая (гл. V—X) — Е. А. Глазуновым. Названия глав: I — Параллельное проектирование и аффинное соответствие; II — Проблема аксонометризации проекционного чертежа; III — Многомерная аксонометрия; IV — Свойства параллельной аксонометрической проекции; V — Способы решения основных геометрических задач в аксонометрических проекциях; VI — способы преобразования аксонометрических проекций; VII—Многогранники в аксонометрических проекциях; VIII —Кривые линии в аксонометрических проекциях; IX — Кривые поверхности в аксонометрических проекциях; X — Приложения метода аксонометрических проекций к техническим задачам.

Книга допущена в качестве учебного пособия для вузов, но это не может считаться ее основным назначением. Она представляет научную монографию и наряду с общеизвестными содержит новые результаты, в том числе принадлежащие авторам. В главе II излагается теория полных и неполных изображений Н. Ф. Четверухина и вопросы аксонометризации чертежа (какие данные следует указать на чертеже, чтобы оригинал стал метрически определенным). В главе III излагается многомерная аксонометрия и дается понятие об ее приложениях к химии (изучение многокомпонентных химических систем, получивших большое развитие за последние годы). Впервые публикуются номограммы (А. И. Островского и М. В. Бурде) для зависимостей между параметрами ортогональной аксонометрии. На номограмме А. И. Островского в разных местах помещены изображения основного куба и таким образом эта номограмма позволяет подобрать параметры ортогональной аксонометрии, руководствуясь непосредственно желательным видом изображения. В главе 1 (§ 9) впервые публикуется весьма простое решение задачи о реконструкции натуральной системы координат по ее аксонометрическому изображению, принадлежащее Е. А. Глазунову.

Книга ограничивается параллельной аксонометрией, т. е. авторы совсем не касаются вопросов центральной аксонометрии.

Н. М. Бескин

1437 К. Эквидистанта и среднее геометрическое для построения кривых степени выше второй. Черни, Цибарди (Equidistanza e medie geometriche per la costruzione di curve di grado superiore al secondo. Cerni C., Zibardi L., 64 pp., ill., Cedam, Padova, 1953), Ricerca scient., 1954, **24**, № 3, 664 (библ.)

1438 К. Учебник геометрического черчения и учение о проекции. Лагерквист (Lärobok i geometrisk ritning och projektionslära. Lagerqvist Erik, 84 s., ill., Bonniers, Stockholm, 1953, 6.75 kr.), Tekn. tidskr., 1953, **83**, № 48, 1024 (библ.)

1439 К. Курс начертательной геометрии. Гордон В. А., Семенцов-Огиевский

М. А. (Для машиностр. механ.-технол. специальностей втузов), изд. 8-е, 447 стр., Гостехиздат, М., 1953, 10 р. 35 к.

1440 К. Начертательная геометрия. Граф (Darstellende Geometrie. Graf U., 218 S., 356 Abb., 1953, geb. 10.50), Neue techn. Bücher, 1953, **30**, № 5, 109 (библ.)

1441 К. Начертательная геометрия. Громов М. Я. (Учеб. пособие), 279 стр. (Всес. заоч. политехн. ин-т), М., 1954, б. ц.

1442 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Отто, Отто (Zbiór żadań z geometrii wykreslnej. Otto E., Otto F., 14 ark., Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954, 4.68 Rb.), Biul. eksportowy, 1954, № 1, 20 (библ.)

1443 К. Решение задач по техническому черчению и проективной геометрии. Джэксон (Solution of problems in engineering drawing and projective geometry. Jackson K. L., Pitman, 7 s. 6 d.), Research, 1953, **6**, № 11, 451 (библ.)

1444 РЕЦ. Проблема параллельных и ее решение. Цахариас (Das Parallelenproblem und seine Lösung. Zacharias M., 2 Aufl., 43 s., B. G. Teubner, Leipzig, 1951, 2.10 f.) [**Рецензия: Занен** (Zaanen A. C.), Nieuw arch. wiskunde, 1953, **1**, № 3, 216 (нем.)]

Книга дает представление о гиперболической геометрии для учеников средней школы.

1445 РЕЦ. Лекции по начертательной геометрии. Вольберг (Deskriptivní geometrie. Volberg O. A., 346 str., Vydalo nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953, 37.20 Kčs.) [**Рецензия: Гавличек** (Havliček Karel), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 4, 368—370 (чеш.)]

Перевод с русского.

1446 РЕЦ. Основы перспективы. Шульце (Grundlagen der Perspektive. Schulze W., 64 S., Fachbuchverlage GmbH, Leipzig, 1952, 4 DM) [**Рецензия: Хохштейнер** (Hochsteiner), Technik, 1953, 8, № 9, 631 (нем.)]

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1447. Аппроксимация точечных преобразований плоскостей кремоновыми в точках, где якобиан и его ранг равны нулю. Лонго (Approssimazione cremoniana delle trasformazioni puntuali fra piani in una coppia a jacobiano nullo di caratteristica zero. Longo Carmelo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 374—385 (итал.)

Необходимые и достаточные условия того чтобы аналитическое точечное соответствие T между двумя проективными пространствами S_r и S'_r допускало аппроксимацию при помощи кремонова соответствия T_c в окрестности пары точек (O, O'), найдены Б. Сегре и другими авторами для случая, когда якобиан в (O, O') отличен от нуля или равен нулю, но имеет ранг $\rho = r - 1$.

В реферируемой работе автор находит эти условия в случае, когда ранг якобиана равен нулю.

Я. П. Бланк

1448 РЕЦ. Коллоквиум по алгебраической геометрии, Льеж, 19, 20, 21 декабря 1949 г. (Colloque de géométrie algébrique, Liège, 19, 20, 21 décembre 1949, 200 pp., Masson, Paris, 1950, 1.400 fr.) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 9—10, 316—317 (франц.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1449. О существовании поверхности постоянной средней кривизны при наперед заданном граничном контуре. Хейнц (Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Heinz Erhard), Math. Ann., 1954, **127**, № 3, 258—287 (нем.)

Доказывается существование поверхности постоянной средней кривизны, проходящей через пространственный замкнутый контур Γ^*. Поверхность ищется в параметрической форме. Вопрос приводится к отысканию минимума некоторого функционала. Задача всегда разрешима, если постоянная H (значение средней кривизны) удовлетворяет неравенству

$$|H| < H_1 = (\sqrt{17} - 1)/8.$$

Контур Γ^* предполагается спрямляемым и расположенным внутри единичной сферы. *В. А. Яблоков*

1450. О D-линиях на поверхностях второго порядка. Вундерлих (Sur les lignes D des quadriques. Wunderlich Walter), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 465—468 (франц.)

D-линиями поверхности называют линии, расположенные на поверхности, у которых соприкасающаяся сфера касается поверхности.

Пользуясь синтетическими соображениями, автор исследует D-линии на поверхностях второго порядка и приходит к следующему основному результату.

Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — циклические точки поверхности второго порядка Q. Они определяют пучок конических сечений. Касательные к каждой D-линии поверхности Q пересекают одно и то же коническое сечение этого пучка.

Обратно, кривая, расположенная на Q, касательные которой пересекают одно и то же коническое сечение пучка I_1, I_2, I_3, I_4, есть D-линия.

Этот результат обобщается на неевклидовы D-линии поверхностей второго порядка и на евклидовы D-линии циклид.

Я. П. Бланк

1451. Уравнения первого порядка, связанные с триортогональной системой. Булиган (Équations du premier ordre liées à un système triple orthogonal. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 15, 772—774 (франц.)

В предыдущем сообщении автора (РЖМат, 1954, 3453) показано, что отыскание триортогональных систем приводит к изучению уравнений вида $pq + Ap + Bq = 0$. Теперь это уравнение заменяется системой $p = (u - 1)B$, $q = (1 - u)A/u$, условие совместности которой приводит к уравнению пер-

вого порядка Σ для u. Σ линейно относительно u_x, u_y, u_z. Утверждается, что исследование триортогональных систем в целом и с точки зрения теории функций сводится к такой же задаче для интегралов уравнения Σ, что является более легкой задачей. *А. М. Васильев*

1452 К. **Дифференциальная геометрия. Т. I. Бернацкий** (Geometria rozniczkowa. T. I. Biernacki M., 12 ark., Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954, 12 Rb.), Biul. eksportowy, 1954, № 1, 19 (библ.)

1453 РЕЦ. **Геодезические линии и геодезические круги поверхностей вращения постоянной кривизны. Шиллинг** (Die geodätischen Linien und geodätischen Kreise der Rotationsflächen konstanter Krümmung. Schilling F., Bd. I., 162 S., Bd. II, 188 S., R. Oldenburg, München, 1953, 40 DM) [**Рецензия: Радон** (Radon J.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 263 (нем.)]

1454 РЕЦ. **Коллоквиум по дифференциальной геометрии, проходивший в Лувене с 11 по 14 апреля 1951 г.** (Colloque de géométrie différentielle, tenue à Louvain du 11 au 14 avril 1951, 235 pp., Georges Thone-Masson C., Liège — Paris, 1951, 2.450 fr.) [**Рецензия: Зюсс** (Süss W.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, 56, № 2/3, Abt. 2, 55 (франц.)]

1455 РЕЦ. **Курс инфинитезимальной геометрии. Вып. I. Векторы и тензоры. Элементарная теория. Жюлья** (Cours de géometrie infinitésimale (professé à l'École Polytechnique). Fasc. I. Vecteurs et tenseurs. Théorie élémentaire. Julia G., 102 p., Gauthier-Villars, Paris, 1953, 2.000 fr.) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 11—12, 373 (франц.)]

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1456. **О конфигурации четырех прямых проективного пространства четырех измерений. Моргантини** (Sula configurazione di quattro rette di uno spazio proiettivo a quattro dimensioni. Morgantini Edmondo), Atti Acad. Ligure, 1952, **9**, 29—35 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Автор показывает, как четыре прямые общего положения в проективном 4-пространстве определяют пятую «ассоциированную» прямую такую, что всякая плоскость, пересекающая любые четыре из этих пяти прямых, пересекает также пятую [ср. Baker H. F., Principles of geometry, vol. 4, Cambridge, 1925, 113—124). *H. S. M. Coxeter*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 246.]

1457. **Параллельные кривые. Гендерсон** (Parallel curves. Henderson G. P.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 1, 99—107 (англ.)

Рассматриваются свойства эволют и эвольвент n-мерного евклидова пространства. Эвольвента p-го порядка (p-th involute) вводится как ортогональная траектория соприкасающихся p-плоскостей. Совокупность эвольвент p-го порядка образует p-параметрическое семейство параллельных кривых F_p. Кривые, принадлежащие F_p и не расположенные на концентрических гиперсферах, имеют точно одну общую p-эволюту. Гиперсфера с центром в точке p-эволюты имеет в соответствующей точке кривой касание по крайней мере $p+1$-го порядка.

Полярная развертывающаяся поверхность D_p семейства F_{n-1} вводится как

$$\vec{z}_p = \vec{r} + \sum_{1}^{p+1} c_i \vec{\xi}_i + \sum_{p+2}^{n} y_i \vec{\xi}_i \ (p = 1, \ldots, n-1),$$

где $\vec{\xi}_i$ — векторы сопровождающего репера, а y_l и s играют роль параметров. Это определение не зависит от выбора кривой из семейства F_{n-1}, т. е. от величин c_i. Далее доказывается ряд свойств эволют и эвольвент p-го порядка обобщающих известные их свойства:

Эволюты p-го порядка образуют D_p. D_{p+1} огибает $(n-p-1)$-плоскости, порождающие D_p $(p = 1, \ldots, n-2)$. Если C не лежит на гиперсфере, то D_p порождается соприкасающимися $(n-p-1)$-плоскостями кривой $C^* = D_{n-1}$.

Эволюта p-го порядка семейства F_p является местом точек пересечения нормальных $H_p(s)$ и соответствующих образующих D_p.

Эволюты первого порядка кривых F_{n-1} являются геодезическими линиями D_1 — свойство, характеризующее эти эволюты.

Угол между касательными в соответствующих точках двух эволют первого порядка данной кривой постоянен. *Г. С. Баржин*

1458. **О вполне геодезических подпространствах риманова пространства. Сингал, Бехари** (On the totally geodesic sub-spaces imbedded in a Riemannian space. Singal M. K., Behari Ram), Math. Student, 1954, **22**, № 1, 37—41 (англ.)

Доказываются теоремы: 1) Если V_m допускает вполне геодезическое подпространство V_n, то нормальные направления к V_n являются главными направлениями Риччи пространства V_m в точках V_n; 2) Если V_{n+1} допускает ∞^1 вполне геодезических гиперповерхностей V_n, то касательные направления в любой точке будут главными направлениями Риччи для V_{n+1} тогда и только тогда, когда все гиперповерхности суть пространства Эйнштейна. *Ю. Е. Пензов*

1459. **Геометрия тканей и пространства аффинной связности. Слебодзинский** (Géométrie textile et les espaces à connexion affine. Ślebodziński Władysław), Rozpr. mat., 1953, **3**, 1—32 (франц.)

Геодезические линии пространства аффинной связности образуют гомографическую систему, если их можно разбить на ∞^{n-1} конгруенций таким образом, чтобы существовало проективное соответствие между направлениями линий, принадлежащих

этим конгруенциям и проходящих через различные точки многообразия (конгруенция состоит из ∞^{n-1} кривых).

С таким пространством можно связать единственным образом другую аффинную связность с кручением, структурные уравнения которой имеют вид:

$$D\omega^i = [\omega\ \omega^i] + s^i_{kl}\,[\omega^k\,\omega^l],$$

$$D\omega = k_{ik}\,[\omega^i\,\omega^k],$$

$\sum_l s^l_{kl} = 0$ (Haimovici M., Ann. sci. Univ. de Jassy, 1943, 29, ч. 1, 90–100).

Автор показывает, как ввести связность такого типа в пространство, в котором задана $n+1$ конгруенция кривых или $n+1$ однопараметрическое семейство гиперповерхностей. Задача эквивалентности этих образов сводится к задаче эквивалентности для связности.

Аналогично, к семейству n конгруенций в n-мерном пространстве можно присоединить аффинную связность с уравнениями

$$D\omega^i = [\pi_i\,\omega^i] + s^i_{kl}\,[\omega^k\,\omega^l],\ D\pi^i = \Pi^i,$$

$$\pi_i = a_{ik}\,\omega^k,\ \sum_l s^l_{kl} = 0,\ a_{ii} = 0.$$

А. М. Васильев

1460. Эллиптические пространства, изометрично погруженные в евклидовы пространства. Б л а н у ш а (Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans des espaces euclidiens. B l a n u š a D a n i l o), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, ser. 2, № 2, 81—114 (франц.; резюме хорв.)

Реферат первой части этой статьи см. РЖМат, 1954, 4158.

Эллиптическое n-мерное пространство El_n может быть погружено в евклидово R_N, $N = n(n+3)/2$ так, что геодезическим соответствуют круги. При сохранении этого последнего условия число измерений N не может быть снижено.

Если $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — внутренние координаты El_n, а x_{ik} $(k = 1, 2, \ldots,\ i+1;\ i = 1, 2, \ldots, n)$ суть $n(n+3)/2$ прямоугольных координат R_N, то погружение реализуется уравнениями

$$x_{s1} = \frac{R}{2}\sin^2\psi_n \sin^2\psi_{n-1} \ldots \sin^2\psi_{s+1} \sin 2\psi_s \times$$
$$\times \sin\psi_{s-1} \ldots \sin\psi_1\ (s = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{rs} = \frac{R}{2}\sin^2\psi_n \ldots \sin^2\psi_{r+1} \sin 2\psi_r \sin\psi_{r-1} \cdots$$
$$\ldots \sin\psi_s \cos\psi_{s-1}\ (s = 2, \ldots, r,\ r = 2, 3, \ldots, n),$$

$$x_{s,s+1} = \sqrt{\frac{s+1}{2s}}\,\frac{R}{2}\sin^2\psi_n \ldots \sin^2\psi_{s+1} \times$$
$$\times \left(\frac{s-1}{s+1} + \cos 2\psi_s\right)\ (s = 1, 2, \ldots, n).$$

El_n расположено на гиперсфере S_{N-1} объемлющего евклидова пространства R_N, радиуса $R\sqrt{n/2(n+1)}$ с центром в начале координат.

Движения El_n самого в себе осуществляются посредством движений объемлющего R_N, оставляющих неподвижным центр гиперсферы. Исследуются пересечения эллиптических пространств евклидовыми. *Я. П. Бланк*

1461. Теория вложения W_m в W_n. Г л а в а т ы й (Embedding theory of a W_m in a W_n. H l a v a t ý V.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1952, **1**, ser. 2, 403—438 (англ.)

Пусть имеем пространство Вейля $W_n(\xi^\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n > 2$, с основным ξ-тензором $g_{\lambda\mu}$ (ξ-тензором называется система величин, преобразующаяся по тензорному закону в связи с преобразованием $\xi^\nu \leftrightarrow \xi^{\nu'}$). Как известно, связность имеет вид

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \{^\nu_{\lambda\mu}\} + \frac{1}{2}\,(Q_\mu\,\delta^\nu_\lambda + Q_\lambda\,\delta^\nu_\mu - Q_\alpha\,g^{\alpha\nu}\,g_{\lambda\mu}),$$

где $\left\{^\nu_{\lambda\mu}\right\}$ — символ Кристоффеля 2-го рода, а Q_λ — дополнительный ξ-вектор, который при перенормировке $\bar g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}$ изменяется по формуле $\bar Q_\lambda = Q_\lambda - \partial \ln\sigma / \partial\xi^\lambda$. Ковариантное дифференцирование относительно $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ обозначается ∇_μ.

Если при перенормировке $\bar g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}$ ξ-тензор (T) изменяется по формуле $(\bar T) = \sigma^k\,(T)$, то число k называют его характером. В работе существенную роль играет оператор ∇^*_μ, который, действуя на ξ-тензор (T) характера k, дает $\nabla^*_\mu\,(T) \equiv \nabla_\mu\,(T) + kQ_\mu\,(T)$.

Уравнения $\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a)$, $a, a, \ldots, a, \ldots = 1, 2, \ldots, m < n$, определяют в W_n $\underset{1}{}\ldots\underset{s}{}$ подпространство X_m. Обозначив $T^\nu_a \equiv \partial\xi^\nu / \partial\eta^a$, строим η-тензор $g_{ab} \equiv T^\lambda_a\,T^\mu_b\,g_{\lambda\mu}$, η-вектор $Q_a \equiv T^\lambda_a\,Q_\lambda$, η-оператор $\nabla_a \equiv T^\lambda_a\,\nabla_\lambda$ и величины

$$T^\nu_{\underset{u+1}{a}\ \underset{u}{a}\ldots\underset{1}{a}} \equiv \nabla_{\underset{u+1}{a}} T^\nu_{\underset{u}{a\ldots a}},\ u = 1, 2, 3, \ldots$$

При фиксированной точке $P \subset X_m$ систему величин $T^\nu_{\underset{w}{a\ldots a}\ \underset{1}{}}(P)$ можно рассматривать как систему ξ-векторов. Доказывается, что найдется такое наименьшее число $N = N(P)$, $1 \leqslant N \leqslant n$, для которого через ξ-векторы $T^\nu_{\underset{x}{a\ldots a}\ \underset{1}{}}(P)$, $x = 1, 2, \ldots, N$ линейно выразится всякий ξ-вектор $T^\nu_{\underset{w}{a\ldots a}\ \underset{1}{}}(P)$. Линейное пространство $S^x(P)$, натянутое на векторы $T^\nu_a(P), \ldots, T^\gamma_{\underset{x}{a\ldots a}\ \underset{1}{}}(P)$, $(\xi\eta)$-инвариантно. Оно называется x-вым соприкасающимся пространством для X_m. Его размерность m_x такова, что

$$m_x \leqslant m + \sum_{u=1}^{x-1}\frac{m^u\,(m+1)}{2},\ x = 2, 3, \ldots, N$$

и $m_1 = m$, так как ξ-векторы $T^\gamma_a(P)$ в работе предполагаются линейно независимыми.

Если $m_N = n$, то X_m называется общим, а если $m_N < n$, то — специальным. Под символом $N(+1)$ в случае общего X_m разумеется число N, а в случае специального X_m — число $N+1$. Теперь $m_{N(+1)} = n$. Введем числа $n_{x-1} \equiv m_x - m_{x-1}$, $1 \leqslant x \leqslant N(+1)$, где $m_0 = 0$. Будем считать, что индексы a_x, b_x, ... пробегают значения от $1 + m_{x-1}$ до $m_x (a_1 = 1, \ldots, m$ и поэтому можно писать просто $a)$.

Можно построить систему n_{x-1} линейно независимых ξ-векторов $M^{\nu}_{a_x}(P) \subset S^x(P)$, которые для $x > 1$ ортогональны к $S^{x-1}(P)$ и между собою. Натянутое на эти векторы линейное пространство $N^{x-1}(P)$ размерности n_{x-1} оказывается $(\xi\eta)$-инвариантным. Оно называется $(x-1)$-ым нормальным пространством для X_m в точке P.

Если $x = 1, \ldots, N(+1)$, то индекс $a_x = 1, \ldots, n$. В этом случае вместо a_x, b_x, ... будем употреблять индексы $A, B, \ldots$, F-преобразованием (преобразованием Френе) называется линейное преобразование с коэффициентами

$$F^{a_x}_{b'_x} \equiv A^{a_x}_{b'_x},\ F^{a'_x}_{b_x} \equiv A^{a'_x}_{b_x},\ F^{a_x}_{b'_y} \equiv 0,\ F^{a'_x}_{b_y} \equiv 0$$
$$x, y = 1, 2, \ldots, N(+1),\ x \neq y,$$

где A суть функции от η (с определителем, отличным от нуля), удовлетворяющие соотношениям

$$A^{a_1}_{b'_1} = \frac{\partial \eta^{a_1}}{\partial \eta^{b'_1}} \text{ и}$$

$$g_{a_x b_y} A^{a_x}_{a'_x} A^{b_y}_{b'_y} = \delta_{a'_x b'_y} \quad \text{(символ Кронекера).}$$

Соответствующий F-преобразованию тензор будем называть F-тензором. F-связностью назовем систему функций $\Gamma^A_{Bc_1}$, преобразующуюся по закону

$$\Gamma^{A'}_{B'c'_1} = F^{A'}_{A} F^{B}_{B'} F^{c_1}_{c'_1} \Gamma^{A}_{Bc_1} + F^{A'}_{A} \partial F^{A}_{B'} / \partial \eta^{c'_1}.$$

Система функций $\Gamma^A_{Bc_1} \equiv M^A_\lambda \nabla_{c_1} M^\lambda_B$, где $M^{b_x}_{\lambda} \equiv M^{\gamma}_{a_x} g_{\gamma\lambda} \delta^{a_x b_x}$ ($\delta^{a_x b_x}$ — символ Кронекера), образует F-связность. Компоненты Γ^a_{bc} этой связности образуют на X_m связность Вейля. Компоненты $\Gamma^{a_x}_{b_y c}$ при $x \neq y$ оказываются F-тензорами. Эти тензоры дают возможность написать для W_m в W_n уравнения Френе, которые здесь не приводятся. Условиям интегрируемости этих уравнений (а также некоторым приложениям) будет посвящена вторая часть работы, которую автор намерен опубликовать в ближайшее время.

Соприкасающееся к W_m пространство S^x называется максимальным, если $m_x = m + \sum_{u=1}^{x-1} m_n \times (m+1)/2$. В работе указаны необходимые и достаточные условия максимальности S^x. На примере $N=2$ указана возможность построения системы дифференциальных уравнений для W_m с максимальными соприкасающимися пространствами.

Наконец, вводится понятие и указываются необходимые и достаточные условия касания порядка r двух W_m в W_n. *П. И. Швейкин*

1462. Соотношения между римановой и эрмитовой геометриями. Чжэнь Шэн-шень (Relations between Riemannian and Hermitian geometries. Chern Shiing-shen), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 575—587 (англ.)

Риманово многообразие $2n$ измерений называется локально эрмитовым, если в окрестности всякой его точки можно найти n таких независимых комплексных функций z^k от его параметров, что метрику пространства можно записать в виде $ds^2 = h_{ik} dz^i \overline{dz}^k$, $\overline{h_{ik}} = h_{ki}$, где $\overline{z}$, $\overline{h}$ — комплексно сопряженные z, h. Если при этом внешний дифференциал формы $h_{ik}[dz^i \overline{dz}^k]$ равен нулю, то пространство называется локально келеровым.

При помощи теории систем дифференциальных форм в инволюции доказаны теоремы:

1. Для того чтобы риманово пространство было локально эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки существовало поле ортонормальных реперов такое, что тензор кривизны, отнесенный к этим реперам, удовлетворяет уравнениям

$$R_{l'mjk} + R_{lm'jk} + R_{lmj'k} + R_{lmjk'} - R_{lm'j'k'} - R_{l'mj'k'} - R_{l'm'jk'} - R_{l'm'j'k} - R_{l'm'jk'} = 0,$$
где $k' = n + k$ и т. д.,
$$R_{lmj'k'} + R_{l'm'jk} + R_{lm'j'k} + R_{l'mjk'} + R_{lm'jk'} + R_{l'mj'k} - R_{lmjk} - R_{l'm'j'k'} = 0.$$

2. Для того чтобы пространство было локально келеровым, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{jklm} = R_{jkl'm'} = R_{j'k'l'm'};\quad R_{jk'lm'} = R_{kj'lm'};$$
$$R_{jk'l'm'} = R_{kj'l'm'};\quad R_{jklm'} = R_{j'k'lm'};$$
$$R_{jk'lm} = R_{kj'lm}.$$

Как следствие получается, что риманово пространство постоянной кривизны K является локально келеровым только при $K = 0$.

В конце на примерах показано, что не всякое локально келерово многообразие является келеровым в целом. *А. М. Васильев*

1463. О псевдокелеровых многообразиях постоянной голоморфической кривизны. Яно, Моги (Sur les variétés pseudokähleriennes à courbure holomorphique constante. Yano Kentaro, Mogi Isamu), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 17, 962—964 (франц.)

Псевдокелеровым называется многообразие размерности $2n$ и класса C^4, в котором заданы положительно определенный симметрический тензор g_{ik} и кососимметрический тензор $\varphi_{ik} = g_{ia}\varphi^a_k$, удовлетворяющие условиям:

$$g_{ab}\varphi^a{}_i \varphi^b{}_k = g_{ik} \qquad \text{(Эрмит)}$$

$$(\varphi^i_{k,l} - \varphi^i_{l,k})\,\varphi^k_p - (\varphi^i_{k,p} - \varphi^i_{p,k})\,\varphi^k_l = 0$$ (Экманн, Фрёлих)

$$\varphi_{ikl} \equiv \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0$$ (Келер),

где запятая означает частное дифференцирование по координатам многообразия. Голоморфическая площадка (plan golomorfique) определяется локальными векторами u^i и $v^i = \varphi^i_k u^k$. Для того чтобы риманова кривизна k любой такой площадки была одна и та же, необходимо и достаточно, чтобы тензор римановой кривизны пространства имел вид

$$R_{iklp} = \frac{k}{4}[(g_{kl}g_{ip} - g_{kp}g_{il}) + $$
$$+ (\varphi_{kl}\varphi_{ip} - \varphi_{kp}\varphi_{il}) - 2\varphi_{ik}\varphi_{lp}].$$

В таких пространствах через каждую голоморфическую площадку проходит вполне геодезическая поверхность; каждая голоморфическая площадка может быть движением пространства переведена в любую другую; расстояние между соседними сопряженными точками любой геодезической постоянно и равно $2\pi/\sqrt{k}$. Все эти свойства характеристичны для пространств изучаемого типа. Риманова кривизна любой площадки, построенной на единичных векторах u^i, v^k, равна $k(1+3\lambda^2)/4$, где $\lambda = \varphi_{ik}u^i v^k$. *А. М. Васильев*

1464. О пространствах высшего порядка со связностью, принадлежащей группе Ли. Кавагути (On a higher order space with the connection belonging to a Lie group. Kawaguchi Akitsugu), Rend. Circolo, mat. Palermo, 1952, **1**, сер. 2, 361—372 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается составное многообразие, базисным пространством которого является пространство всех элементов $s+1$ порядка параметризированной m-поверхности n-мерного пространства X_n, а пространствами, ассоциированными с точками базисного пространства, — изоморфные между собой N-мерные пространства Клейна M_N, фундаментальной группой которых является r-параметрическая группа преобразований Ли. В этом составном многообразии вводится изоморфная связность заданием изоморфного отображения пространств Клейна, ассоциированных с бесконечно близкими точками базисного пространства, т. е. с бесконечно близкими m-поверхностными элементами $s+1$-го порядка. Кроме этого, между базисным пространством и ассоциированными пространствами устанавливается дополнительная связь, с помощью которой заданная связность в составном многообразии индуцирует связность в базисном пространстве. Далее автор рассматривает теорию кривизны и проблему эквивалентности. *В. В. Вагнер*

1465. Группа преобразований, оставляющих инвариантной инфинитезимальную связность. Кобаяси (Groupe de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale. Kobayashi Shoshichi), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 6, 644—645 (франц.)

Номидзу (Nomizu K., Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, 816—825), доказал, что всякая группа преобразований многообразия, сохраняющая на нем аффинную связность, является группой Ли. Опираясь на это, автор доказывает, что группами Ли являются также группы, сохраняющие проективную или конформную связность. При доказательстве используется известная связь между проективной, конформной и аффинной группами. Утверждается также, что группа, сохраняющая связность в расслоенном пространстве с базисом B и слоем — дифференциальной группой некоторого порядка над B, является группой Ли. *А. М. Васильев*

1466. Элементарные основные принципы обобщенной теории относительности. В. Главатый (The elementary basic principles of the unified theory of relativity. V. Hlavatý Václav), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 1, 1—52 (англ.)

Разрабатываются математические вопросы, связанные с обобщенной теорией относительности Эйнштейна (Einstein A., The meaning of relativity, Princeton Univ. Press. 1950, Appendix II), а именно, рассматривается пространство с метрическим тензором $g_{\lambda\mu} \neq g_{\mu\lambda}$. То, что в основу теории кладется не симметричный (и не кососимметричный) тензор $g_{\lambda\mu}$, автор называет принципом A (Hlavatý V., J. Rational Mech. and Analysis, 1952, **1**, 539—562). Далее вслед за Эйнштейном автор вводит связность $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \neq \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, накладывая на нее условие

$$\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma^\alpha_{\lambda\omega} g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\omega\mu} g_{\lambda\alpha}, \qquad (B)$$

которое он называет принципом B. Основная проблема — решить уравнения (B) относительно $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ при заданных $g_{\lambda\mu}$. Эта проблема была поставлена (но не разрешена) Эйнштейном при $n=4$; автор рассматривает ее при любом n.

Тензор $g_{\lambda\mu}$ разлагается на симметрическую и кососимметрическую части

$$g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}, \quad h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda}, \quad k_{\lambda\mu} = -k_{\mu\lambda}.$$

Предполагается, что $\det|h_{\lambda\mu}| \neq 0$; в дальнейшем поднятие и опускание индексов производится при помощи $h_{\lambda\mu}$. Исключение из этого правила: под $g^{\lambda\mu}$ понимается матрица, обратная $g_{\lambda\mu}$ (предполагается $\det|g_{\lambda\mu}| \neq 0$):

$$g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

Под $\{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\}$ понимаются христоффели по отношению к $h_{\lambda\mu}$; под ∇_ω — соответствующее ковариантное дифференцирование. Далее вводятся обозначения

$$S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}, \quad K_{\omega\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\nabla\omega g_{\nu\mu} + \nabla_\mu g_{\omega\nu} + \tfrac{1}{4}\nabla_\nu g_{\omega\mu},$$

Показывается, что если решение уравнения (B) существует, то оно имеет вид:

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\} + S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + 2S^{\nu\cdot\beta}_{\cdot(\mu}k_{\lambda)\beta}, \qquad (1)$$

где тензор $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ в свою очередь должен быть определен из уравнения

$$2S_{\xi\eta\zeta}X^{\xi\eta\zeta}_{\omega\mu\nu} = K_{\omega\mu\nu}, \qquad (2)$$

причем

$$X^{\xi\eta\zeta}_{\omega\mu\nu} = \delta^{[\xi}_{[\omega}\delta^{\eta]}_{\mu]}\delta^\zeta_\nu - 2\delta^{[\xi}_\nu k^{\cdot\eta]}_{[\omega}k^{\cdot\zeta}_{\mu]} - 2\delta^{[\xi}_{[\mu}k^{\cdot\eta]}_{\omega]}k^{\cdot\zeta}_\nu.$$

Обозначим через $((X))$ квадратную матрицу порядка $l = n^2(n-1)/2$, составленную из элементов $X^{\xi\eta\zeta}_{\omega\mu\nu}$, где $\xi\eta\zeta$ ($\xi < \eta$) и $\omega\mu\nu$ ($\omega < \mu$) играют роль собирательных индексов; через $((X, K))$ обозначим ту же матрицу с приписанной к ней строкой из элементов $K_{\omega\mu\nu}$ ($\omega < \mu$).

Тогда для того чтобы уравнение (2), а тем самым и уравнение (B), имело: 1) единственное решение, 2) более одного решения, 3) совсем не имело решений, необходимо и достаточно соответственно

1) $r((X)) = l$,

2) $r((X)) = r((X, K)) < l$.

3) $r((X)) < r((X, K))$, $r((X)) < l$,

Здесь r обозначает ранг соответствующей матрицы.

Обозначим

$$U^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} = 2S^{\nu\cdot\beta}_{\cdot(\mu}k_{\lambda)\beta}. \qquad (3)$$

Как видно из (1), это симметрическая часть разности $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}$. Обратно, пользуясь (2), можно через U выразить S:

$$2S_{\omega\mu\nu} = K_{\omega\mu\nu} - 4U_{\alpha\nu[\mu}k^{\cdot\alpha}_{\omega]}. \qquad (4)$$

Вместо уравнений (2) для отыскания $S_{\xi\eta\zeta}$ можно рассматривать эквивалентные уравнения для $U_{\alpha\beta\gamma}$:

$$U_{\alpha\beta\gamma}\left[\delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\mu} - 2k^{\cdot\beta}_{(\mu}k^{\cdot\alpha}_{\lambda)}\delta^{\gamma}_{\nu} + 2k^{\cdot\alpha}_{\nu}k^{\cdot\beta}_{(\nu}\delta^{\gamma}_{\lambda}\right] = \\ = -k^{\cdot\beta}_{(\mu}K_{\lambda)\nu\beta}. \qquad (5)$$

Во второй части работы автор в явном виде получает решение задачи (B) во всех тех случаях, которые могут встретиться в обобщенной теории относительности, т. е. при $n = 4$ и при $h_{\lambda\mu}$, обладающем сигнатурой $---+$. Для этой цели используется неголономный репер, в котором $h_{\lambda\mu}$ и $k_{\lambda\mu}$ одновременно приводятся к простейшему виду, причем возможны 4 канонических формы матрицы $g_{\lambda\mu}$:

$$\left\|\begin{matrix} -1 & a & 0 & 0 \\ -a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} -1 & a & 0 & 0 \\ -a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & a & \varepsilon a \\ 0 & -a & h_{33} & 0 \\ 0 & -\varepsilon a & 0 & h_{44} \end{matrix}\right\|, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Возвращаясь к общему случаю $n > 1$, автор выводит необходимые и достаточные условия, при которых решение уравнения (2) существует, единственно и является тензором специального вида: $S^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = S_{[\lambda}\delta^{\nu}_{\mu]}$ или $S^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = p^{\nu}k_{\lambda\mu}$. Далее устанавливаются необходимые и достаточные признаки как того, что у связностей $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ и $\left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}$ все геодезические общие, так и того, что только изотропные геодезические у них общие. Все признаки носят аналитический характер.

В третьей части дается метод приближенного решения уравнений (B), который состоит в основных чертах в следующем.

Обозначая для краткости

$$H_{\nu\lambda\mu} = -k^{\cdot\beta}_{(\mu}K_{\lambda)\nu\beta},$$

$$\overline{X}^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda\mu} = 2k^{\cdot\beta}_{(\mu}k^{\cdot\alpha}_{\lambda)}\delta^{\gamma}_{\nu} - 2k^{\cdot\alpha}_{\nu}k^{\cdot\beta}_{(\mu}\delta^{\gamma}_{\lambda)}, \qquad (6)$$

мы можем записать (5) в виде

$$U^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma}\left[\delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\mu} - \overline{X}^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda\mu}\right] = H_{\nu\lambda\mu}. \qquad (7)$$

Считая тройку индексов за один собирательный индекс, мы имеем здесь линейное преобразование «вектора» U в «вектор» H при помощи «матрицы» $1 - \overline{X}$:

$$U(I - \overline{X}) = H.$$

Умножая это равенство справа на матрицу $I + \overline{X} + \overline{X}^2 + \ldots + \overline{X}^{m-1}$, где m — любое натуральное число, получаем:

$$U = H(I + \overline{X} + \overline{X}^2 + \ldots + \overline{X}^{m-1}) + U\overline{X}^m. \qquad (8)$$

Как видно из (6), $\overline{X}^m$ будет однородным многочленом степени $2m$ относительно $k^{\cdot\flat}_{\mu}$, так что при достаточно малых $k_{\lambda\mu}$ и достаточно большом m членом $U\overline{X}^m$ можно пренебречь, и мы получаем приближенное решение проблемы (B).

П. К. Рашевский

1467. Теоремы единственности в обобщенной теории относительности. Главатый, Шаэнз (Uniqueness theorems in the unified theory of relativity. Hlavatý V., Sáenz A. W.), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 3, 523—536 (англ.)

Рассматривается та же проблема, что и в предыдущей работе Главатого, именно, решение уравнения (B) относительно $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ (см. реф. 1466) при тех же предположениях и обозначениях, но специально для случая $n = 4$. Устанавливается эффективный признак существования и единственности решения (в предыдущей работе этот признак дан в мало эффективной форме).

Обозначим $G = g/h$, $K = k/h$, $D = (hk_{\lambda\mu}k^{\lambda\mu}/2)^2 - 4hk$, где g, h, k — определители $|g_{\lambda\mu}|$, $|h_{\lambda\mu}|$, $|k_{\lambda\mu}|$. Предполагается, что $h \neq 0$ и $h_{\lambda\mu}$ имеет сигнатуру $---+$. Приводя тензоры $h_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu}$ одновременно к простейшему виду в подходящем неголономном репере, можно записать уравнения (2) для определения $S_{\omega\lambda\mu}$ (реф. 1466) в обозримом виде.

В итоге исследования получается, что система уравнений (B) имеет единственное решение в том и только в том случае, когда или $D \neq 0$, $GK \neq 0$, или $D \neq 0$, $K = 0$, $G \neq 0$, 2, или $D = 0$.

П. К. Рашевский

1468. Теорема регулярности в последней теории Эйнштейна. Ленуар (Théorème de régularité dans la dernière théorie d'Einstein. Lenoir Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 6, 424 (франц.)

Лихнерович (Lichnerowicz A., Problèmes globaux en mécanique relativiste, Paris, 1939, 42) показал,

что если пространство-время общей теории относительности, рассматриваемое в целом, стационарно и всюду регулярно, то оно является евклидовым (тензор кривизны равняется нулю). Непосредственными подсчетами и примерами автор показывает, что в новой теории Эйнштейна (Théorie de la gravitation généralisée, Paris, 1951) теорема Лихнеровича не имеет места. *А. М. Васильев*

1469. Четырехмерная единая теория гравитационного и электромагнитного поля. Шафхаузер-Граф (Versuch einer 4-dimensionalen einheitlichen Feldtheorie der Gravitation und des Elektromagnetismus. Schaffhauser-Graf Edith), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 4, 743—765 (нем.)

Так же, как в общей теории относительности массы определяют геометрическую структуру пространства, здесь массы и заряды порождают четырехмерное финслерово пространство с абсолютным параллелизмом линейных элементов. Используется теория Картана этих пространств (Cartan E., Les espaces de Finsler, Actualités sci. et industr., **79**, Paris). Электромагнитный потенциал поля приравнивается свернутому тензору кручения A_i, а потому тензор электромагнитного поля имеет вид $P_{ij} = A_{j|i} - A_{i|j}$. В силу абсолютного параллелизма линейных элементов дивергенция тока $I^i = \varepsilon_0 P^{ik}|_k$ равна нулю, т. е. выполняется закон сохранения заряда. Уравнения Максвелла $P_{(ij|\lambda)} = 0$ и $\varepsilon_0 P^{ik}|_k = I^i$ также автоматически выполняются. Сила Лоренца k_j равна $-\varepsilon_0 P^{ik}|_k P_{ij}$, тензор электромагнитного поля $T_i^k = \varepsilon_0\left(P_{i\rho}P^{k\rho} - \frac{1}{4}\delta_i^k P_{rs}P^{rs}\right)$ удовлетворяет соотношению $T_i^i = 0$. По аналогии с общей теорией относительности тензор энергии-импульса материи T_{ik} приравнивается $-(2R_{ik} - g_{ik}R)/2\varkappa$. Из обобщенных уравнений Бианки следует $T_i^l\big|_l = 0$, т. е. выполняется закон сохранения энергии-импульса материи. Если электромагнитное поле исчезает, $A_{i|j} = 0$, пространство становится римановым и получается теория Эйнштейна.

М. В. Васильева

1470. Электродинамика Дирака и единая теория поля Эйнштейна. Стивенсон (Dirac's electrodynamics and Einstein's unified field theory. Stephenson G.), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 11, 1595—1596 (англ.)

В единой теории поля Эйнштейна, в которой $g_{ik} \neq g_{ki}$, составляющие аффинной связи $\Gamma_{kl}^i \neq \Gamma_{lk}^i$ вычисляются из уравнений

$$\partial g_{mn}/\partial x^k - g_{ms}\Gamma_{kn}^s - g_{sn}\Gamma_{mk}^s = 0. \qquad (1)$$

Из (1) автор получает:

$$\Gamma_{(mn)}^s = \left\{ {s \atop mn} \right\} + g^{(sk)}\left[F_{pn}\Gamma_{[mk]}^p + F_{mp}\Gamma_{[kn]}^p\right], \qquad (2)$$

$$\Gamma_{[mn]}^s = -\frac{1}{2}g^{(sk)}H_{kmn} + g^{(sk)}F_{mn|k}, \qquad (3)$$

$$F_{ik} = g_{\ k]},\ H_{kmn} \equiv \frac{\partial F_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x^m}.$$

Вертикальная черта означает ковариантное дифференцирование с помощью символов $\Gamma_{(mn)}^s$; $\left\{ {s \atop mn} \right\}$ — символ Кристоффеля, составленный из $g_{(mn)}$.

Теория Эйнштейна изменяется в двух пунктах: а) устанавливается требование $H_{kmn} = 0$; б) вместо требования $\Gamma_m = \Gamma_{[mn]}^s = 0$ устанавливается требование $\Gamma_m\Gamma_n g^{(mn)} = \text{const}$, причем Γ_m идентифицируется с электромагнитным потенциалом A_m.

Из (3) следует

$$g^{(pm)}g^{(sk)}F_{ps\,|\,k} = A^m, \qquad (4)$$

и из (2), (3), пренебрегая степенями F_{mn} выше второй,— приближенно

$$\Gamma_{(mn)}^s = \left\{ {s \atop mn} \right\} + g^{(sk)}g^{(il)}(F_{in}F_{mk\,\|\,l} + F_{mi}F_{kn\,\|\,l}),$$

$$\Gamma_{[mn]}^s = g^{(sk)}F_{mn\,\|\,k},$$

где $\|$ означает ковариантное дифференцирование с помощью $\left\{ {s \atop mn} \right\}$.

В том же приближении из (4) следует

$$F_{\|\,s}^{ms} = A^m.$$

Таким образом, показано, что при выполнении требований а) и б) единая теория поля Эйнштейна приводит к неградиентно-инвариантной электродинамике Дирака (Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., 1951, **A209**, 291). *Ю. Р.*

1471 РЕЦ. О кривых и поверхностях в обобщенных пространствах. Финслер (Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Finsler P., 160 S., Verlag Birkhäuser AG., Basel, 1951, 15.40 sFr.) [**Рецензия: Хопф** (Hopf H.), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 2, 178—179 (нем.)]

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

1472. Об одном типе устойчивых высказываний в теории контактных преобразований. Булиган (Sur un type d'énoncé stable en théorie des transformations de contact. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 22, 2136—2138 (франц.)

Приводится новое доказательство основного результата предыдущего сообщения автора (РЖМат. 1953, 879). При этом от контактного преобразования $\overline{OM} = \tau(x, y, z, p, q)$ требуется, чтобы векторы $\tau_x + p\tau_z$ и $\tau_y + q\tau_z$ не были компланарны. При доказательстве используется очевидность результата для поверхностей, локально представимых в виде $z = \varphi(x, y)$, где φ — функция класса C_2, а также равномерная непрерывность преобразования τ в пространстве переменных x, y, z, p, q.

А. М. Васильев

См. также: 1056, 1189

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1473. **О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. Люстерник Л. А.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 3—66

На плоскости определяется оператор усреднения $Sf(A) = \sum c(A, B) f(B)$, где A и B — узлы некоторой сети V_h, состоящей из параллелограммов или центрально-симметрических шестиугольников; $c(A, B) \geqslant 0$; $c(A, B) = c(B, A)$; $\sum_B c(A, B) = 1$ и лишь для конечного числа узлов B, при данном A, $c(A, B) \neq 0$, $c(A, B) = c(A - B)$. При рассмотрении собственных значений разностного оператора усреднения $S(Q)$, а значит, и разностного аналога оператора Лапласа $\Delta_h(Q) = (S_h(Q) - 1)/Mh^2$, где Q — данная область, M — некоторое число, зависящее только от формы сети (например, в случае квадратной сети $M = 1/4$), устанавливается, что при $h \to 0$ $\mu(S_h, Q)$ стремится к $\mu(Q) = 1$, оставаясь меньше 1, а $\lambda(S_h, Q)$ стремится к $\lambda(S)$, где $0 > \lambda(S) \geqslant -1$ (например, для квадратной сети $\lambda(S) = -1$, для треугольной сети $\lambda(S) = -1/2$ и т. д.), причем $\lambda(S_h, Q)$ все время остается больше $\lambda(S)$, где через $\mu(S_h, Q)$ и $\lambda(S_h, Q)$ (соответственно $\mu(S)$ и $\lambda(S)$) обозначены наибольшее и наименьшее собственные значения оператора $S_h(Q)$ (соответственно S). Это дает возможность провести исследование сходимости и устойчивости некоторых итерационных процессов. Так, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных разностей сводится к решению системы уравнений $\varphi(A) = (S_h\varphi(A) - \alpha\varphi(A))/(1 - \alpha)$; для сходимости итерационного процесса этой системы необходимо и достаточно, чтобы α удовлетворяло условию $\alpha \leqslant (\lambda(S) + 1)/2$ (например, в случае квадратной сети $\alpha \leqslant 0$, треугольной сети $\alpha \leqslant 1/4$ и т. д.). При невыполнении этого условия при достаточно малых h появляются так называемые «паразитические», т. е. большие по абсолютной величине, отрицательные собственные значения, которые и вызывают расходимость процесса итерации; при этом случайные ошибки вычисления (например, ошибки округления) при достаточно малом h неограниченно возрастают, и процесс становится неустойчивым.

При решении смешанной задачи для уравнения теплопроводности $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u;\quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y);\quad \varphi(x, y, t)|_\Gamma = 0\right)$ методом сеток процесс решения соответствующего разностного уравнения $u(x, y, t_{n+1}) = [S_h u(x, y, t_n) - \alpha u(x, y, t_n)]/(1 - \alpha)$, где $\alpha = 1 - (Mh^2/\tau)$ $(\tau = t_{n+1} - t_n)$, совпадает с итеративным решением в случае задачи Дирихле; отсюда непосредственно следует условие устойчивости $\tau \leqslant 2Mh^2/(1 - \lambda(S))$, рассмотренное в случае квадратной сетки ($M = 1/4$, $\lambda(S) = -1$) Коллатцем (Численное решение дифференциальных уравнений, М., 1953). Для смешанной задачи $\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y);\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y);\ u(x, y, t)|_\Gamma = 0\right)$ условие устойчивости суть $\tau < 2h\sqrt{M/(1 - \lambda(S))}$. Эти условия устойчивости разностных уравнений, как показывает далее автор, «почти» совпадают с условиями сходимости решений (сходимость метода сеток) разностных уравнений к соответствующим решениям данных дифференциальных начально-краевых задач. Например, в случае уравнения теплопроводности, при $\tau \leqslant q \cdot 2Mh^2/(1 - \lambda(S))$, где $q < 1$, приближенное решение $w_{\tau h}(A, t)$ стремится при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ к точному решению $w_{00}(A, t)$ равномерно по A на $\overline{Q}$ и по t для любого полуинтервала (t_0, ∞), $t_0 > 0$. В частности, при $\tau = 0$, $h > 0$ (метод прямых) имеет место сходимость; при $\tau > 0$, $h = 0$ — расходимость и неустойчивость.

Далее обобщается на случай параллелограммных сетей теорема, доказанная автором для квадратной сети (Матем. сб., 1926, **33**, № 2, 173—202). Именно, если u — непрерывная в $R \supset Q$ функция, то функции $\Gamma_{Qh}u$ при $h \to 0$ сходятся к $\Gamma_{Q0}u$ равномерно в R (а значит, и в $\overline{Q} \subset R$), где $\Gamma_{Qh}u$ удовлетворяет уравнению $\Delta_h(Q)\Gamma_{Qh}u = 0$ в Q_h и равна u вне Q_h (аналогично определяется функция $\Gamma_{Q0}u$) и R — некоторый параллелограмм.

При использовании этой теоремы устанавливается h-вполне непрерывность обратного к $\Delta_h(Q)$ оператора $[\Delta_h(Q)]^{-1}u_h = \Delta_h^{-1}u_h - \Gamma_{Qh}(\Delta_h^{-1}u_h)$, где u_h — нормированный собственный элемент (равный нулю вне $Q \cap V_h$) оператора $\Delta_h(Q)$, отвечающего собственному значению λ_h (оператор называется h-вполне непрерывным, если он преобразует всякое ограниченное множество в h-равностепенно непрерывное и равномерно ограниченное; при этом система $\{u_h\}$ называется h-равностепенно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие положительные числа α и h_0, что для любой функции u_h системы при любом $h < h_0$ и для любой пары точек A и B, где $|A - B| < \alpha$, имеет место $|u_h(A) - u_h(B)| < \varepsilon$), откуда непосредственно следует, что $\{u_h\}_C$ — совокупность всех собственных элементов, для которых $\lambda_k \leqslant C$ (C — заданная положительная константа), есть h-равностепенно непрерывная и равномерно ограниченная система. Установив еще ряд лемм, автор доказывает теорему о сходимости метода сеток в случае решения задачи о собственных значениях. Именно, если обозначить через $\lambda_{10} < \lambda_{20} \leqslant \lambda_{30} \leqslant \ldots$ и $\langle u_{i0}\rangle$ искомые собственные значения и функции соответственно, а через $\langle\lambda_{ih}\rangle$ и $\langle u_{ih}\rangle$ получаемые методом сеток соответствующие друг другу собственные значения и функции, то имеет место при $h \to 0$: 1) $\lambda_{ih} \to \lambda_{i0}$; 2) если $\lambda = \lambda_{m,0} = \lambda_{m+1,0} = \ldots = \lambda_{m+p-1,0}$ есть p-кратное собственное значение дифференциального оператора, то каждое $u_{m+i,0}$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ есть равномерный предел линейных комбинаций $\sum_{i=0}^{p-1} c_i^{(h)} u_{m+i,h}$ (в частности, если λ_{k0} есть простое, то при $h \to 0$ $u_{kh} \to u_{k0}$ равномерно на $\overline{Q}$); 3) каждое $u_{m+i,h}$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ может быть при достаточно малых h с любой степенью точности равномерно аппроксими-

ровано дифференциальной собственной функцией u, отвечающей собственному значению λ. В случае квадратичной сети доказательство теоремы сходимости основывается на доказанном автором неравенстве $\lambda_{kh} \geqslant \lambda_{k0}\left(1 - \frac{h^2}{6}\lambda_{k0}\right)$ и проводится значительно проще.

В последнем параграфе даются некоторые вероятностные оценки накопления ошибок. Например,

$$\text{М. О.}\left\{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left[b_r^{(k)}\right]^2\right\} = \frac{d}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2n},$$

где $A^k b = \left(b_1^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\right)$; A — n-мерная симметрическая матрица; (λ_i) — система ее собственных значений; b — случайный вектор, компоненты которого b_j суть независимые случайные величины; $d = d_j$ — дисперсия b_j. Далее, при каждой k-й итерации оператора усреднения S_h (решение задачи Дирихле методом сеток) появляется в узлах A случайная ошибка $\delta(A, k)$. Если считать ошибки $\delta(A, k)$ (A и k — переменные) независимыми и обладающими равными дисперсиями d, то имеет место $dC \ln k \leqslant T_k \leqslant dC_1 \ln k$ ($C > 0$), где T_k — математическое ожидание среднего квадрата полной ошибки.

Наличие в работе большого числа опечаток и описок затрудняет чтение (например, только на одной стр. 42 имеется несколько описок); имеются несоответствия ссылок на литературу (например, стр. 3, надо [12] вместо [11]), теоремы (например, стр. 41, стоит «теоремы 1» вместо «теоремы 2»), формулы (например, стр. 40, надо «левая часть (6,16)» вместо «правая часть (6,14)»). *В. К. Саульев*

1474. Об общих сеточных аппроксимациях оператора Лапласа. Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1267—1269

См. реф. 1473.

1475. Оценки ошибки при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Волков Е. А., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 897—899

Дается ряд оценок погрешности, возникающей при решении методом сеток задачи Дирихле. При этом в отличие от аналогичных оценок Гершгорина и Микеладзе, использующих максимум модуля по всей области погрешности разностного оператора и не учитывающих характер их распределения по области, автор пользуется тем фактом, что погрешности разностной аппроксимации могут существенно возрастать только в узлах, приближающихся к границе, и тем, что число таких узлов (т. е. приграничных) имеет порядок $1/h$. Это позволяет автору требовать меньшей гладкости от искомого решения, чем это делают в своих оценках Гершгорин, Микеладзе и Коллатц. Так, вместо известной оценки Гершгорина $|u_h - u| < C_1 h M_1 + C_2 h^2 M_4$ (u — точное, u_h — приближенное решения; C_i — постоянные, не зависящие от шага сетки h; M_i — верхняя грань модулей i-ых производных в данной области), автор дает оценку $|u_h - u| < C_3 h^2 M_2 + C_4 h M_3$.

В случае криволинейной границы при сносе граничных значений по Коллатцу (линейная интерполяция), автор дает оценку почти порядка h^2:

$$|u - u_h| < C_3 (M_3 + M_2) h^2 \{|\ln h| + 1\}.$$

Специально исследован случай выпуклых многоугольников со сторонами, параллельными осям координат и биссектрисам координатных углов, когда $|u_h - u| < C_2 M_2 h^2 \{|\ln h| + 1\}$.

В трехмерном случае оценки ухудшаются.

В. К. Саульев

1476. Численное решение уравнений Навье — Стокса для течения вокруг кругового цилиндра с числом Рейнольдса 40. Кавагути (Numerical solution of the Navier — Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40. Kawaguti Mitutosi), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 6, 747—757 (англ.)

Исследуется двумерный поток вокруг кругового цилиндра, погруженного в вязкую жидкость с числом Рейнольдса $R = 40$. Соответствующие уравнения Навье — Стокса, приведенные к виду

$$\frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{2}{R}\Delta\zeta = 0; \quad \zeta = -\Delta\psi$$

(ψ — функция потока; ζ — вихрь; $R = 2/\nu$ — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость), при помощи преобразования $X = 1/r$, $Y = (2/\pi)\theta$ переходят в уравнения

$$-\frac{2X^3}{\pi}\frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(X, Y)} + X^2\frac{\partial\zeta}{\partial X}\cos\frac{\pi Y}{2} + \frac{2X}{\pi}\frac{\partial\zeta}{\partial Y}\sin\frac{\pi Y}{2} + \\ + \frac{2}{R}\left\{X^4\Delta\zeta - \left(X^4 - \frac{4X^2}{\pi^2}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2} + X^3\frac{\partial\zeta}{\partial X}\right\} = 0$$

и

$$\zeta = -X^4\Delta\psi + \left(X^4 - \frac{4X^2}{\pi^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} - X^3\frac{\partial\psi}{\partial X};$$

при этом исследуемая бесконечная область $[\infty \geqslant r \geqslant 1, \pi \geqslant \theta \geqslant 0]$ (r, θ — полярные координаты; ввиду симметричности рассматривается только часть, находящаяся в верхней (x, y)-полуплоскости) отображается на прямоугольник $[1 \geqslant X \geqslant 0, 2 \geqslant Y \geqslant 0]$ в (X, Y)-плоскости. Краевые условия имеют вид $\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\sin\theta$ на поверхности цилиндра ($r = 1$); $\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \to 0$ при $r \to 0$.

Для численного решения указанной проблемы рассматриваемая область покрывается квадратной сеткой с шагом $n = 0, 1$, и в полученных 232 узлах записываются приближенные выражения данной задачи: 1) во внутренних узлах

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{X^2\pi^2}\right)\psi_0 = \psi_M + \frac{n^2}{4X^4}\zeta_0 - \\ - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{X^2\pi^2}\right)(\psi_1 + \psi_3) + \frac{n}{8X}(\psi_2 - \psi_4) \qquad (1)$$

и

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{X^2\pi^2}\right)\zeta_0 = \zeta_M - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{X^2\pi^2}\right)(\zeta_1 + \zeta_3) + \\ + \frac{n}{8X}(\zeta_2 - \zeta_4) + \frac{R}{16\pi X}\{(\psi_2 - \psi_4)(\zeta_1 - \zeta_3) -$$

$$-(\psi_1-\psi_3)(\zeta_2-\zeta_4)\}+\frac{R}{16X^2}(\zeta_2-\zeta_4)\cos\frac{\pi Y}{2}-$$

$$-\frac{Rn}{8\pi X^3}(\zeta_1-\zeta_3)\sin\frac{\pi Y}{2}, \qquad (2)$$

где индексы 0, 1, 2, 3 и 4 указывают, что значения функции должны быть взяты в соответствующих точках по схеме 4 — 3 / 0 — 2, 1, а индекс M указывает, что надо взять среднее арифметическое четырех соседних; 2) в узлах на поверхности ($r=1$, или $X=1$)

$$\zeta_{X=1}=-200\,\psi_{X=0,9}-222\sin(\pi Y/2); \qquad (3)$$

3) в узлах на бесконечности ($r=\infty$, или $X=0$) используется асимптотическое поведение вихря потока $\psi=-\frac{C_D}{2}\left(1-\frac{Y}{2}\right)$ при $r\to\infty$ (C_D — коэффициент, легко вычисляемый по значениям ψ и ζ на поверхности цилиндра) и $\zeta|_{r=\infty}=0$. Процесс решения итеративный: по первому приближению функций ψ и ζ (найденному автором по методу Галеркина) исправляется функция ζ в узлах линии $X=0{,}1$ при помощи (2) с использованием значений ζ в узлах линии $X=0$ и 0,2 и ψ в узлах линий $X=0$, 0,1 и 0,2. Для этого необходимо решить совместную систему 19 уравнений для ζ на линии $X=0{,}1$. Аналогично, используя значения ζ на линии $X=0{,}1$ вместе с первоначальными значениями ψ на линии $X=0$ и $X=0{,}2$, исправляются значения ψ на линии $X=0{,}1$ по (1) и т. д. Значения ζ на поверхности ($X=1$) исправляются посредством (3).

При решении задачи было проделано 65 полных циклов итерации с сохранением 5 цифр (а для узлов, находящихся вблизи поверхности,— 6 цифр). Сходимость итерационного процесса медленная. Для ее ускорения использована экстраполяция φ и ζ на каждом шагу аппроксимации, что дало удовлетворительный результат: разность между значениями последовательных итераций для φ и ζ не превосходит 0,3% от максимального значения последних 4 циклов.

Численное интегрирование рассматриваемой проблемы продолжалось около года. Результаты численного решения задачи подробно проанализированы (при этом установлено существование устойчивого течения для $R\approx 40$) и сравнены с экспериментальными данными. Совпадение вполне удовлетворительное.

В дополнении приводится таблица значений функций ψ и ζ в узлах сетки. *В. К. Саульев*

1477. Применение больших шагов в конечно-разностных уравнениях. Фокс (The use of large intervals in finite-difference equations. Fox L.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 41, 14—18 (англ.)

Полимеризируя с Саусвеллом, автор высказывается за использование по возможности большого шага при численном дифференцировании и интегрировании с помощью конечных разностей. При этом целесообразно использовать и разности высших порядков, однако шаг должен быть выбран так, чтобы разности были «сходящимися», т. е., начиная с некоторого порядка, они колебались бы около нуля с допустимой амплитудой колебаний.

Применение малого шага и отбрасывание разностей высших порядков приводит при численном интегрировании дифференциальных уравнений к накоплению вычислительных погрешностей, а при решении краевых задач — к увеличению числа неизвестных в подлежащих решению линейных системах. *К. А. Семендяев*

1478. Асимптотические оценки погрешностей при численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений разностными методами. Бродский М. Л., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 4, 599—602

Рассматривается численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (y и f — r-мерные векторы) с помощью формулы

$$y_n=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j y_{n-j}+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n-j}.$$

Погрешность решения на m-том шагу Δ_m выражается через начальные погрешности $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{k-1}$ и вычислительные погрешности δ_j ($k\leqslant j\leqslant m$) при помощи решений некоторого вспомогательного однородного разностного уравнения. В предположении, что все корни λ_p уравнения $\lambda^k-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\lambda^{k-j}=0$ не превышают по модулю единицы и, кроме, быть может, нуля, простые решения этого разностного уравнения выражаются с точностью до $O(h)$ через решения некоторых систем линейных дифференциальных уравнений. В результате даются формулы, выражающие Δ_m с точностью до $O(h^2)$ линейно через значения при $x=x_m$ решений $z_{p,n}(x,v)$ векторных линейных дифференциальных уравнений $\frac{dz}{dx}=\sigma_p A(x)z$ с начальными условиями $z(x_n)=v$, где $\sigma_p=\sigma(\lambda_p)$, $A(x)$ — матрица $\left\|\frac{\partial f^{(p)}}{\partial y^{(q)}}\right\|$ и $v=\Delta_0,\ldots,\Delta_{k-1},\delta_k,\ldots,\delta_m$.

Большая часть результатов дается без доказательств. *К. А. Семендяев*

1479. О решении нелинейных уравнений, определенных в пространстве Банаха. Фенъё (Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen. Fenyö I.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 85—93 нем.; резюме русс.)

Изучается сходимость метода Ньютона для уравнений вида $F(x)=0$, где $F(x)=f(x)-y$ — нелинейная операция, переводящая пространство Банаха X в пространство Банаха Y, $y\in Y$. Установлена сходимость последовательностей «основного» метода Ньютона

$$x_n=x_{n-1}-[F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1})$$

и модифицированного метода

$$\xi_n=\xi_{n-1}-[F'(x_0)]^{-1}F(\xi_{n-1})$$

$(n=1, 2, \ldots)$ в предположении, что $f(x)$ имеет лишь первую производную $f'(x)$ в смысле Фреше. Предположение о существовании второй производной Фреше $f''(x)$, которое делается в работах Л. В. Канторовича (см., напр., Труды Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 104—144), заменено в случае последовательности $\{x_n\}$ на следующее: $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой сфере с центром в x_0. В случае последовательности ξ_n предполагается, что $f'(x)$ удовлетворяет условию:

$$\| [f'(x_0)]^{-1} [f'(x) - f'(x_0)] \| \leqslant \bar{q}. \quad 0 < q < 1$$

при $\| x - x_0 \| \leqslant r$, $r > 0$.

Примечание референта. Аналогичный результат для $\{x_n\}$ иным путем получен в работе Стейна (РЖМат, 1954, 4917). Имеется неточность в формулировке условия Липшица на стр. 86, 1 строка снизу; следует читать:

$$\| f'(x) - f'(\bar{x}) \| \leqslant C \| x - \bar{x} \|$$

при

$$\| x - x_0 \| \leqslant r; \qquad \| \bar{x} - x_0 \| \leqslant r.$$

И. П. Мысовских

1480. К итеративному решению алгебраических уравнений. Мелн (Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen. Maehly Hans J.), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 3, 260—263 (нем.; резюме англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$ и пусть

$$s_m = \sum_{k=1}^{n} u_k^m \qquad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (*)$$

где $u_k = (x_k - x)^{-1}$.

Число s_m можно выразить через $a_k = \dfrac{1}{P} \dfrac{d^k P}{dx^k}$ $k = 1, 2, \ldots) : s_1 = -a_1, s_2 = a_1^2 - a_2, \ldots$

Предположим, что x — начальное приближение — отстоит от некоторого p-кратного корня $x_1 = x_2 = \ldots = x_p$ значительно меньше, чем от x_k при $p < k \leqslant n$. Из $(*)$ следует, что приближенно $s_1 = pu_1$, $s_2 = pu_1^2$. Первое из этих равенств при $p = 1$ дает формулу метода Ньютона; для произвольных p получаем известную формулу $u_1 = s_2 / s_1$.

Таким же путем, удерживая в формуле $(*)$ слагаемые, отвечающие двум ближайшим к x корням $\bar{x}$, $\tilde{x}$, кратности которых соответственно p и q, автор получает три новых формулы для случаев: 1) p и q известны, 2) известна сумма $s_0 = p + q$, 3) $p + q$ — любое. Выпишем формулу для случая 2):

$$u^2 (s_0 s_2 - s_1^2) - u (s_0 s_3 - s_1 s_2) + (s_1 s_3 - s_2^2) = 0,$$

где $u = (\bar{x} - x)^{-1}$. Из двух корней этого квадратного уравнения нужно брать наибольший по модулю.

Каждый шаг вычислений по новым формулам требует решения квадратного уравнения и значительной работы, связанной с определением s_k. Особенностью новых формул является быстрая сходимость: в случае 2) сходимость кубическая, в случае 3) — четвертого порядка. Доказательства этих утверждений не приводятся. *И. П. Мысовских*

1481. Численное интегрирование функций многих переменных. Тайлер (Numerical integration of functions of several variables. Tyler G. W.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 393—412 (англ.)

Выведен ряд кубатурных формул для приближенного интегрирования по прямоугольной области функций двух и трех переменных. Метод получения этих формул представляет собой непосредственное обобщение на многомерный случай вывода формулы Ньютона — Котеса.

Приведены следующие формулы для двойных интегралов (m — число узлов, в которых берутся значения подинтегральной функции, формула точна для всех многочленов степени не выше n):

$m = 4$	$n = 3$	$m = 13$	$n = 5$
$m = 5$	$n = 3$	$m = 21$	$n = 7$

и формулы для тройных интегралов:

$m = 6$	$n = 3$
$m = 9$	$n = 3$
$m = 21$	$n = 5$

А. Л. Дышко

1482. Применение приближенных формул для вычисления кратных интегралов в инженерной практике. Хейфец Б. С., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 3, 39—48

Дано описание практического применения формул механических кубатур к определению запасов полезных ископаемых и объемов земляных работ. По мнению автора, такое применение может способствовать снижению стоимости изыскательных работ и может дать значительный экономический эффект. Приведен перечень приближенных кубатурных формул для круга, квадрата и шестиугольника, использованных при вычислениях. *В. И. Крылов*

1483. Метод решения систем уравнений с большим числом неизвестных путем разбиения на подсистемы. Крон (A method to solve very large physical systems in easy stages. Kron Gabriel), Trans. I. R. E., 1953, PGCT-2, Dec., 71—90 (англ.)

Рассматривается (известная ранее) дискретная двумерная модель уравнений Максвелла, состоящая из узлов квадратной решетки, связанных через омическое и индуктивное сопротивления и заземленных через емкость. Для исследования такой схемы предлагается разбить ее на более мелкие части, изучение которых сводится к решению сравнительно компактной системы уравнений, а затем исключить особым приемом неизвестные токи, связывающие отдельные подсхемы.

Указывается, что такой метод дает выигрыш не только в количестве одновременно используемых коэффициентов и неизвестных (что существенно при решении на вычислительных машинах), но и в абсолютном количестве требуемых вычислений. Дается ссылка на работы, где аналогичный метод применяется к решению уравнения Пуассона и к исследованию больших энергосистем. *Ю. А. Шрейдер*

1484. Уравнивание полигонов при совместном определении поправок в углы и стороны. Димов (Изравняване на полигонов ход при съвместно определяне поправките на ъглите и страните. Димов Л.), Техника (София), 1954, № 2, 26—29 (болг.)

Описан способ уравнивания полигонов при совместном определении поправок углов и логарифмов сторон. Приведен пример и показано, что раздельное уравнивание углов и сторон полигонометрического хода имеет некоторые преимущества по затрате вычислительного труда и дает практически те же результаты, которые получаются при совместном уравнивании. *А. И.*

1485. Замечания о приближенном методе для нахождения параболического уравнения по экспериментальным данным. Чапанис (Notes on an approximation method for fitting parabolic equations to experimental data. Chapanis A.), Psychometrika, 1953, 18, № 4, 327—336 (англ.)

Даны N точек, определяемых координатами X, Y, полученными экспериментальным путем. Требуется найти постоянные a, b и c уравнения параболы

$$Y' = aX^2 + bX + c,$$

наилучше подходящей к системе этих точек. Здесь Y' — значения ординаты Y, даваемые уравнением при подстановке в него экспериментальных значений абсциссы X.

Наиболее естественным является решение этой задачи по способу наименьших квадратов (условие минимума величины $\sum (Y-Y')^2$). Известно, что этот способ сводится к решению относительно a, b и c системы уравнений:

$$\sum X^2Y = a\sum X^4 + b\sum X^3 + c\sum X^2,$$

$$\sum XY = a\sum X^3 + b\sum X^2 + c\sum X,$$

$$\sum Y = a\sum X^2 + b\sum X + cN.$$

Льюис в своем руководстве «Численные методы в психологии» (Lewis D., Quantitative methods in psychology, 1948, 77—79) описал приближенный способ, анализу которого и посвящена реферируемая статья.

Суть способа Льюиса состоит в том, что ищется функция $Y'' = dX^2 + eX + f$ при условии минимума величины $\sum (Z-Z')^2$, где $Z = \frac{Y-Y_1}{X-X_1}$.

Простота приближенного способа Льюиса по сравнению со способом наименьших квадратов заключается в том, что приходится решать более простые уравнения:

$$\sum XY = d\sum X^2 + g\sum X$$

$$\sum Z = d\sum X + gN$$

(d, g — неизвестные).

Автор отмечает следующие особенности способа Льюиса:

1) Всегда имеется разница между параболой, определяемой по способу наименьших квадратов, и параболой Льюиса, так как приближение Льюиса обращает в минимум не $\sum (Y-Y'')^2$, а $\sum (Z-Z')^2$.

2) Чем ближе к наилучшей параболе точка X_1, Y_1, выбранная для образования Z, тем приближение получается лучше.

3) Для улучшения приближения надо выбирать точку X_1, Y_1 так, чтобы X_1 было близко к средине области изменения X.

4) Хотя метод Льюиса не дает минимума $\sum (Y-Y'')^2$, но уравнение $\sum (Y-Y'') = 0$ удовлетворяется.

5) Решение Льюиса инвариантно относительно некоторых простейших преобразований, таких как прибавление ко всем X или Y одного и того же числа, умножение всех X или Y на постоянное число и др.

Приведен пример на вычисление постоянных параболы по 15 точкам. Сначала получена парабола по способу наименьших квадратов, давшая $\sum (Y-Y')^2 = 219$. Затем, принимая в качестве X_1 и Y_1 координаты каждой из 15 экспериментальных точек, получено 15 приближенных парабол, для которых $\sum (Y-Y'')^2$ оказалась в пределах от 225 до 11960. Достаточно близкими к точной параболе получились только 5 из 15 парабол Льюиса. В двух случаях решения Льюиса оказались совсем абсурдными. *В. В. Попов*

1486. Ускоряйте свои математические расчеты! Прайс (Speed up your maths! Price J. Wylam), Technique (Montréal), 1953, 28, № 10, 683—688 (англ.)

Приведены элементарные приемы, ускоряющие устные и письменные вычисления, в том числе приемы, основанные на рациональном округлении приближенных данных и получаемых с их помощью результатов. Эти приемы в специальной литературе указаны давно, но широкого распространения в инженерно-технических кругах, повидимому, до сего времени не имеют, хотя эффективность их бесспорна. См. РЖМат, 1954, 1820, 1821.

В. М. Брадис

1487. О номографических методах в гидрографии. Ч. I. Фишер (Über nomographische Verfahren in der Hydrographie. Teil I. Fischer Joh.), Acta hydrophys., 1953, **1**, № 1, 31—44 (нем.)

На ряде конкретных примеров показывается целесообразность применения номографических методов для гидравлических расчетов. Приводятся номограммы с параллельными шкалами для формул стока, для формулы средней скорости движения воды в каналах при коэффициенте Шези по Форхеймеру, для формулы экономического диаметра трубопровода и др.

Предложен оригинальный графический способ определения величины c из уравнений типа

$$f(c) = \frac{a_1 f(c_1) + a_2 f(c_2) + \ldots + a_n f(c_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

основанный на использовании номограммы формулы $x = af(c)$, состоящей из бинарного поля (x, a), шкалы c и фиксированной точки. Для определения c строят в бинарном поле такой номограммы

ломаную по исходным данным a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3 и т. д. и находят ее замыкающую.

В качестве второго примера приведена номограмма формулы $x = pn^2$, используемая для определения величины n из выражения

$$\overline{n^2} = \frac{p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + \cdots + p_z n_z^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_z}.$$

Теоретическое обоснование предложенного метода и другие приложения, как указывает автор, будут рассмотрены во второй части. *Г. С. Хованский*

1488. К расчету пружин. Геллинг (Zur Berechnung von Schenkelfedern. Gelling Helmut), Draht, 1953, 4, № 10, 386—389 (нем.)

Приводятся две составные номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами для расчета пружин, в основу которых положены формулы

$$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B}, \quad (1)$$

$$M_B = Ph, \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{M_B}{JE} \cdot \pi D i \frac{180}{\pi}. \quad (3)$$

Здесь σ_B — изгибающее напряжение проволоки, M_B — изгибающий момент, W_B — момент сопротивления при изгибе поперечного сечения проволоки, P — действующая сила, h — плечо момента, φ — угол отклонения, J — момент инерции поперечного сечения проволоки, E — модуль упругости, D — средний диаметр витка, i — число витков. Величины W_B и J зависят от d (диаметр проволоки). Поэтому соответствующие шкалы проградуированы по d. Первая номограмма построена для формул (1) и (2). Вторая номограмма — для формулы (3), в которой вместо M_B подставлено значение этой величины из формулы (2). *Г. С. Хованский*

1489. Расчет закрытых расширяющихся резервуаров. Пародди (Die Berechnung von geschlossenen Ausdehnungsgefäßen. Parodi Antonio), Sanit. Technik, 1953, 18, № 10, 287—288 (нем.)

Указывается на возможность представления зависимостей по расчету расширяющихся резервуаров номограммами из выравненных точек с двумя параллельными шкалами и бинарным полем. Приводится такая номограмма для формул

$$V_{\text{при } 95^\circ} = \frac{0{,}04\ W}{\frac{1}{1+0{,}1H} - \frac{1{,}135}{P_3}}, \quad (1)$$

$$V_{\text{при } 120^\circ} = \frac{0{,}06\ W}{\frac{1}{1+0{,}1H} - \frac{1{,}175}{P_3}}, \quad (2)$$

причем бинарное поле (V, H) в номограмме является общим для формул (1) и (2), а параллельные шкалы P_3 и W проградуированы с двух сторон: с одной стороны для формулы (1), с другой стороны для формулы (2).

Здесь V — объем резервуара, W — объем воды в резервуаре в ненагретом состоянии, H — уровень воды в *м*, P_3 — максимальное допустимое давление в *атм*. *Г. С. Хованский*

1490. Определение натягивающего момента затяжки, необходимой для винтовых соединений. Кислер (Die Ermittlung des Anziehmomentes bei Schraubenverbindungen. Kießler Fritz), Ind.-Anz., 1953, 75, № 101, 7—9 (нем.)

Формула, для которой построена номограмма:

$$M_a = 0{,}8\sigma_{0,2} F_s [r_f \operatorname{tg}(\varphi + \rho_G) + r_m \mu_U],$$

где $\operatorname{tg}\rho_G = \mu_G$; ρ_G — угол трения; r_f — средний радиус нарезки; φ — угол наклона винтовой линии; r_m — средний радиус трения в торце гайки (плечо трения); F_s — площадь поперечного сечения по внутреннему диаметру винта.

Номограмма состоит из: 1) бинарного поля, точки которого определяются коэффициентом трения нарезки (μ_G) и видом нарезки, предполагаемой метрической (указывается диаметр болта и шаг); 2) шкал: коэффициента трения в торце гайки (μ_U); предельного напряжения ($\sigma_{0,2}$) в *кг/мм²*; искомого момента (M_a) в *кгм*. Шкалы $\sigma_{0,2}$ и μ_U имеют общий носитель. Шкала M_a проградуирована с двух сторон: для случаев 70% и 80% предельного напряжения $\sigma_{0,2}$.

Приводится подробное описание построения номограммы, вплоть до формул для расчета градуировки шкал. Отдельно даны две номограммы, от соединения которых получается искомая номограмма с немой шкалой. *И. Н. Денисюк*

1491. LCFX-номограмма. Шлике (LCFX nomograph. Schlicke H. M.), Commun. Engng 1953, 13, № 6, 34 (англ.).

Номограмма системы соотношений

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad X = \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

при условии $\omega = 2\pi f$, соответствующих электрическому контуру, содержащему последовательно включенные емкость C и индуктивность L и настроенному в резонанс; f — частота, X — реактивное сопротивление. Номограмма из 4 параллельных логарифмических шкал, соответствующих переменным C, X, L, f. Одним наложением линейки по данным любым двум из этих переменных находим остальные две.

Интересной особенностью этого известного типа номограммы является наличие двойной системы шкал. Одна, проградуированная степенями десяти, дает порядок величины (разряд). Другая — нормальная — указывает значащие цифры. Поэтому, при производстве отсчета линейку накладывают 2 раза — один для получения значащих цифр, а другой для установления места запятой. В результате имеются такие необычайно широкие пределы изменения переменных: $1 < f < 10^{11}$ через $10^{-4} < L < 10^{11}\mu H$; $10^{-4} < X < 10^{7}\Omega$; $1 < C < 10^{11}\mu\mu F$. *И. Н. Денисюк*

1492. Решение уравнения Хазена и Вильямса для линий малой емкости (Solution of Hazen and Williams formula for small capacity lines), Petrol. Engr, 1953, 25, № 10, E-1b (англ.)

Номограмма из выравненных точек, реализующая уравнение

$$p^{0,54} = \frac{162{,}04\ Qg^{0,54}}{cd^{2,63}},$$

предназначена для определения падения давления жидкости при движении по трубе, когда известен диаметр трубы, коэффициент шероховатости, удельный вес жидкости, производительность в час.

Г. Е. Джемс-Леви

1493. **Графическая оценка результатов простых и многократных опытов. Кларк, Хоскинг** (The graphical evaluation of results of simple and multiple slope-ratio assays. Clarke Pamela M., Hosking Zena D.), J. Pharmacy and Pharmacol., 1953, 5, № 9, 586—595 (англ.)

Приводится несколько номограмм из выравненных точек, служащих для ускорения вычислений, связанных со статистической оценкой микробиологических опытов. *Г. Е. Джемс-Леви*

1494. **Номограмма для быстрого расчета балки, подверженной изгибу (перекладины)** (Nomogramma per il calcolo rapido delle travi soggette a flessione deviata (arcarecci)), Costruz. metall., 1953, № 3, 20—21 (итал.)

Номограмма из выравненных точек служит для выбора наиболее подходящего стандартного профиля балки, подверженной изгибу, если известны составляющие момента изгиба по направлениям, параллельному и ортогональному к поверхности земли. Реализуемое уравнение не приводится.

Г. Е. Джемс-Леви

1495. **Номограмма для расчета точной величины нормального времени движения волны. Шнейдер-Рикельме** (Nomogram for computation of exact values of normal move-out times. Schneider—Riquelme Oscar), Geophysics, 1953, **18**, № 4, 824—826 (англ.)

Номограмма из выравненных точек, построенная для формулы

$$\operatorname{cth} p\,(\operatorname{ch} q - 1) + \operatorname{sh} q = r_0,$$

встречающейся в геофизике, предназначена для вычисления точной величины времени движения волны при условии, что даны: а) скорость вблизи данной поверхности, б) быстрота возрастания скорости с глубиной, в) горизонтальное расстояние от места подачи сигнала до приемника, г) время, прошедшее от момента подачи сигнала до момента приема отраженного сигнала. *Г. Е. Джемс-Леви*

1496. **Новая формула кручения ровницы. Корли, Симпсон, Фьори, Браун** (New roving twist formula. Corley J. R., Simpson J., Fiori L. A., Brown J. J.), Text. Res. J., 1953, **23**, № 10, 750—754 (англ.)

Приводится номограмма из выравненных точек для определения кручения ровницы, реализующая формулу

$$y = \frac{0{,}50\,(F)^{1/2}\,(X)^{3/2}}{L},$$

где y — число витков на дюйм, F — тонина нити, X — толщина ровницы, L — длина нити.

Г. Е. Джемс-Леви

1497. **Номограммы во внеклассной работе. Крамская А. А.,** Матем. в школе, 1954, № 5, 29—38

1498 К. **Линейные уравнения в прикладной математике. Перди** (Linear equations in applied mathematics. Purday Herbert Frank Percy, XIV + 240 pp., tables, Oliver and Boyd, Edinburgh, London, Interscience Publishers, New York, 1954), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 229, 9 (библ.)

1499 К. **Математическая обработка результатов физических измерений в условиях студенческой лабораторной практики** (Лекция). **Немиров С. Н.,** 39 стр., М-во культуры СССР, Всес. заоч. энерг. ин-т, М., 1954, беспл.

1500 Д. **Способы последовательных приближений для решения системы линейных алгебраических уравнений строительной механики. Гаврилов Ю. М.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Львовск. политехн. ин-т, Львов, 1954

ТАБЛИЦЫ

1501. **Нули частных сумм ряда e^z. Айверсон** (The zeros of the partial sums of e^z. Iverson K. E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 43, 165—168 (англ.)

Дана таблица действительных и мнимых нулей сумм $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$ с двенадцатью десятичными знаками для $n = 2, 3, \ldots, 23$. Вычисления проведены на гарвардской вычислительной машине Марк IV методом последовательных приближений. Правильность вычислений контролировалась по формулам Вьета. Численные результаты рассмотрены в свете известных свойств $S_n(z)$. При этом обнаруживается, что ранее указанную полубесконечную полосу $|y| < \sqrt{6},\ x > 0$, не содержащую нулей функции $S_n(z)$, по y можно значительно расширить. *К. А. Карпов*

1502 К. **Таблицы трансцендентных функций. Флугг** (Tables of transcendental functions. Fluegge W., Pergamon, 30 s.), Research, 1953, **6**, № 11, 451 (библ.)

1503 К. **Пятизначные таблицы тригонометрических функций, содержащие натуральные значения шести тригонометрических функций через 1′ от 0 до 360° и значение котангенсов и косекансов через 1″ от 0° 00′ до 1° 00′ и через 10″ от 1 до 10°. Хренов Л. С.,** изд. 3-е, 108 стр., Гостехиздат, М., 1954, 4 р. 90 к.

1504 К. **Таблицы семизначных логарифмов. Вега Г.,** 560 стр., Геодезиздат, М , 1954, 31 р.

См. также: 1170, 1227, 1259, 1264, 1285, 1295, 1296, 1297, 1305, 1366, 1367, 1519

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1505. Новый метод синтеза реактивных цепей. **Толбот** (A new method of synthesis of reactance networks. Talbot A.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, № 6, ч. 4, 73—90 (англ.)

Наиболее известным методом синтеза реактивных четырехполюсных цепей является метод разложения матрицы полного сопротивления синтезируемой цепи на сумму матриц. Электротехнической интерпретацией подобного разложения является последовательное соединение четырехполюсников, соответствующих отдельным матрицам. Синтез четырехполюсников может быть выполнен также и с помощью представления матрицы $\left\|\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right\|$, где A, B, C, D — обобщенные параметры четырехполюсника, в виде произведения матриц, каждая из которых может быть непосредственно физически осуществлена в виде простого четырехполюсника. Произведение этих матриц осуществляется в виде каскадного соединения соответствующих простых четырехполюсников.

Работа посвящена дальнейшему развитию второго метода. Доказывается ряд теорем о возможности представления матрицы обобщенных параметров в виде произведения матриц, каждая из которых удовлетворяет условиям осуществимости. Приводятся примеры применения полученных теорем. *В. Т.*

1506. Теорема о свойствах импедансного преобразования, осуществляемого с помощью реактивной цепи. **Сторк** (A theorem on the impedance-transforming properties of reactive networks. Storch Leo), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 7, 833—838 (англ.)

Для получения максимальной отдачи мощности источник должен быть согласован с нагрузкой. Согласование осуществляется путем включения реактивного четырехполюсника между источником и нагрузкой.

Уравнения четырехполюсника могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2, \\ I_1 &= CV_2 + DI_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Вводя обозначения: $w = V_1 / I_1$ — входное сопротивление реактивного четырехполюсника, $z = V_2 / I_2$ — сопротивление нагрузки, из (1) получим

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D}. \qquad (2)$$

Дробно-линейная функция (2) преобразует окружность в плоскости w.

В случае пассивного реактивного четырехполюсника преобразование (2) принимает вид

$$w = \frac{az + jb}{jcz + d}.$$

Можно установить некоторые общие свойства преобразования, совершаемого с помощью реактивного четырехполюсника. Эти свойства формулируются в виде следующих теорем:

Теорема 1а. Окружность, соответствующая полному сопротивлению нагрузки, не имеющая общих точек с осью реактансов, с помощью невырожденного линейного, конечного, фиксированного реактивного четырехполюсника преобразуется в окружность, соответствующую полному входному сопротивлению четырехполюсника, которая вне зависимости от внутренней конфигурации четырехполюсника будет обладать тем же отношением диаметра к активной составляющей полного сопротивления, соответствующего центру окружности.

Теорема 1б. Для того чтобы невырожденный, линейный, конечный фиксированный реактивный четырехполюсник связывал между собою две окружности так, как указано в теореме 1а, необходимо и достаточно, чтобы этот четырехполюсник преобразовывал полное сопротивление нагрузки $z_1 = (r_a r_b)^{1/2} + jx_c$ в полное входное сопротивление $w = (u_a u_b)^{1/2} + jv_c$.

Здесь $r_a + jx_c$ и $r_b + jx_c$ — точки пересечения с окружностью прямой, параллельной вещественной оси и проходящей через центр окружности, соответствующей сопротивлению z, и соответственно $u_a + jv_c$ и $u_b + jv_c$ — для окружности, соответствующей полному сопротивлению w.

Приводятся примеры задач, решение которых может быть осуществлено с помощью выведенной теоремы. *В. Т.*

1507. Теория максимально сглаживающих и квазичебышевских фильтров. **Атия** (Theorie der maximal-geebneten und quasi-Tschebyscheff-schen Filter. Atiya Fuad Surial), Arch. elektr. Übertrag., 1953, **7**, № 9, 441—450 (нем.)

Рассмотрены возможности синтеза электрического четырехполюсника по данной функции затухания. Допустимая функция затухания является рациональной функцией некоторого специального вида от частоты. Детальнее рассмотрены четырехполюсники частного вида, так называемые максимально сглаживающие и квазичебышевские фильтры.

Применяются элементарные рассуждения алгебры и теории функций комплексного переменного о нулях и полюсах рациональных функций и разложения этих функций в непрерывные дроби. Применяются также полиномы Чебышева и квадратные матрицы. *Н. А. Брамо*

1508. Синтез несимметричных *RLC*-цепей. **Уэйнберг** (Synthesis of unbalanced RLC networks. Weinberg Louis), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 3, 300—306 (англ.)

Для ряда специальных применений оказывается удобным осуществить *RLC*-четырехполюсник, нагруженный двухполюсником, в виде каскадного соединения двух четырехполюсников, из которых второй нагружен двухполюсником.

Коэффициент передачи напряжения подобного сложного четырехполюсника может быть представлен в виде

$$K = \frac{E_2}{E_1} = \frac{y_{12a} K_b}{y_{22a} + Y_b}, \qquad (1$$

где y_{22a} и y_{12a} — входная проводимость короткого замыкания и проводимость передачи первого четырехполюсника, Y_b — входная проводимость, а K_b — коэф

фициент передачи напряжения второго четырехполюсника.

Пусть дана рациональная функция K, удовлетворяющая условиям осуществимости в виде коэффициента передачи напряжения RLC-четырехполюсника. Не теряя общности, выражение для K можно записать в виде

$$K = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p_a \cdot p_b}{q_a \cdot q_b}. \qquad (2)$$

Знаменатель дроби (2) $q(s)$, являющийся многочленом Гурвица, может быть представлен в виде суммы двух многочленов Гурвица $q(s) = q_1(s) + Aq_1'(s)$, где A — некоторая положительная постоянная, а $q_1'(s)$ — производная $q_1(s)$. Представив q_1 в виде $q_1 = q_{1a} \cdot q_{1b}$, можно записать $q_1(s) = q_1 + Aq_1' = q_{1a} \cdot q_{1b} + A(q_{1a}' q_{1b} + q_{1a} q_{1b}')$, откуда

$$K = \frac{p/q_1}{1 + Aq_1'/q_1} = \frac{(p_a/q_{1a})(p_b/q_{1b})}{1 + (Aq_{1a}'/q_{1a}) + (Aq_{1b}'/q_{1b})}. \qquad (3)$$

Путем сравнения (3) и (1) могут быть найдены параметры четырехполюсников

$$y_{12a} = \frac{p_a}{q_{1a}}; \quad y_{22a} = 1 + \frac{Aq_{1a}'}{q_{1a}}; \quad K_b = \frac{p_b}{q_{1b}}; \quad Y_b = \frac{Aq_{1b}'}{q_{1b}}. \qquad (4)$$

По найденным из равенств (4) параметрам могут быть построены четырехполюсники.

Методика непосредственно применима к функциям, содержащим многочлены не выше четвертой степени. При более высоких степенях возникает необходимость в применении ламп (промежуточных усилителей). *В. А. Тафт*

1509. Нелинейные сопротивления в однотактных переключательных схемах. Шуэрц, Стейнбак (Nonlinear resistors in logical switching circuits. Schwertz F. A., Steinback R. T.), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 174—186 (англ.)

Авторы утверждают, что кристаллические выпрямители в однотактных переключательных схемах могут быть заменены нелинейными сопротивлениями с вольтамперными характеристиками вида

$$i = kV^n, \qquad (1)$$

где i — ток, проходящий через данное нелинейное сопротивление, V — напряжение, приложенное к этому сопротивлению, k и n — некоторые постоянные.

В случаях, когда используемые в переключательных схемах кристаллические выпрямители по своим характеристикам близки к идеальным (т. е. к выпрямителям, имеющим проводимость 0 в прямом и бесконечность в обратном направлениях), напряжение e, снимаемое с сопротивления нагрузки данной схемы, будет принимать значения, весьма близкие к двум значениям: 0 и E.

В случае же, когда в таких схемах используются нелинейные сопротивления с характеристиками вида (1), напряжение e будет иметь $M+1$ различных значений в зависимости от положений M двухпозиционных переключателей в данной схеме. Однако чем больше показатель нелинейности n, тем лучше схемы с нелинейными сопротивлениями, имеющими характеристики вида (1), аппроксимируют аналогичные переключательные схемы с идеальными выпрямителями.

Приведены формулы и экспериментальные результаты, относящиеся к следующим схемам, построенным из нелинейных сопротивлений с характеристиками вида $i = kV^5$: 1) к схеме, реализующей операцию M-членной дизъюнкции (т. е. операцию, изоморфную логической операции «или», производимую над M предложениями); 2) к матричной схеме, преобразующей первые 8 двоичных чисел в соответствующие восьмеричные цифры; 3) к схеме сумматора, осуществляющего сложение (по модулю 2) трех двоичных цифр и выдающего, кроме того, двоичную цифру переноса, получающегося при этом сложении.

Эти схемы были осуществлены в двух технологически различных вариантах. В одном из этих вариантов в качестве элементов, заменяющих выпрямители, в переключательных схемах использовались индивидуальные нелинейные сопротивления. В другом варианте переключательные схемы изготовлялись из резиновых или керамических пластин с замешанными в них зернами карбида кремния (rubber- or ceramic-bonded sheets of silicon carbide).

Приведенные экспериментальные результаты показывают, что эксплуатационные качества этих двух технологически различных вариантов переключательных схем примерно одинаковы. Однако, как подчеркивают авторы, изготовление переключательных схем по второму варианту экономически более выгодно. Вследствие большей доступности карбида кремния опыты были произведены именно с этим материалом, но для этой цели возможно применение также и других зернистых полупроводников.

Примечание референта. В схеме, изображенной на рис. 15, допущена неточность (не указаны сопротивления, играющие принципиальную роль в действии схемы). *В. И. Шестаков*

1510. Краткая теория счетных переключательных схем. Гольдаммер (Eine kleine Theorie der Rechenschaltungen. Goldammer R.), Radio Mentor, 1954, **20**, № 4, 198—200, 202—204 (нем.)

Популярная статья, предназначенная для первоначального ознакомления с алгеброй релейно-контактных схем и с ее применениями к синтезу счетных переключательных схем.

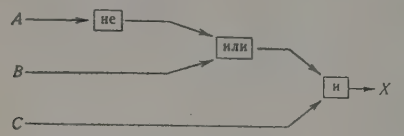
Даны примеры синтеза релейно-контактной схемы для сложения двух чисел, заданных в двоичной системе, и схемы, срабатывающей при выполнении неравенства $a > b$, где a и b — трехразрядные двоичные числа. *В. И. Шестаков*

1511. Применение булевой алгебры к синтезу электронных переключательных схем. Уошберн (An application of Boolean algebra to the design of electronic switching circuits. Washburn S. H.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, ч. 1, 380—388 (англ.)

Описывается алгебраическая методика синтеза электронных переключательных схем из идеализированных двухпозиционных блоков. Основные блоки — переключательные клапаны, инверторы и запоминающие элементы. Блоки описаны функционально, вопросы их физической реализации подробно не обсуждаются. Предлагаемая методика синтеза ана

логична методике, описанной ранее (Keister W., Ritchie A. E., Washburn S. H., The design of Switching Circuits, D. Van Nostrand, New York, 1951; Hartree D. R., Calculating Instruments and Machines, The University of Illinois Press, Urbana 1949). Для записи и преобразования условий работы схем применяется булева алгебра (при этом понимается: $+$ = «или», $\cdot$ = «и», 1 = «возбужденное состояние», 0 = «спокойное состояние»). Кроме того, употребляются структурные диаграммы («символические конфигурации»), позволяющие графически интерпретировать выражения булевой алгебры. Эти диаграммы строятся из компонентов

Например, выражению $X = (A' + B)\,C$ соответствует диаграмма



Рассматриваются как однотактные, так и многотактные схемы.

Однотактные схемы строятся из клапанов и инверторов. Под клапаном понимается блок с двумя входами и одним выходом реализующий конституент единицы или нуля. Существует 6 клапанов: AB, $A + B$, $A'B'$, $A' + B'$, AB', $A + B'$. Их графические символы суть соответственно

Клапан AB реализуется выпрямителями, клапан $A' + B'$ — пентодом и т. д. Комбинации клапанов и инверторов можно рассматривать как новые элементарные блоки. Для синтеза однотактной схемы предлагается следующий процесс: 1) алгебраически записать условия возбуждения (или покоя) выходов схемы; 2) полученные выражения представить с помощью разложений

$$f(X, Y, \ldots) = Xf(1, Y, \ldots) + X'f(0, Y, \ldots) =$$
$$= [X + f(0, Y, \ldots)]\,[X' + f(1, Y, \ldots)]$$

в виде деревьев союзов «или», «и»; 3) полученные деревья начертить в виде структурных диаграмм и расставить значки клапанов «+», «—» по компонентам «или», «и» в соответствии с расстановкой знаков отрицания в этих деревьях. Физически отсутствующие виды клапанов заменяются физически наличными видами клапанов посредством алгебраических преобразований схемных выражений или посредством введения инверторов. Полученные схемы можно упрощать алгебраическими преобразованиями и введением мостиков. Введению мостиков благоприятствует разделительность клапанов. Иногда клапаны $A + B$, $A' + B'$, $A'B'$, AB можно заменять точкой соединения проводов. Описанная методика синтеза обобщима на случай клапанов более чем с двумя входами и одним выходом.

При синтезе многотактных схем, кроме клапанов, инверторов и запоминающих элементов, употребляются также и задерживающие элементы. Синтез многотактной схемы начинается с определения минимального числа запоминающих элементов в схеме. Затем строится таблица включений запоминающих элементов схемы, и с ее помощью условия возбуждения и погашения каждого запоминающего элемента выражаются в зависимости от входных импульсов и состояний всех запоминающих элементов. Полученные выражения реализуются схемами из клапанов по методам синтеза однотактных схем.

В заключение приводится пример синтеза электронного счетчика импульсов по модулю 3. Автор ссылается только на американскую литературу по вопросам синтеза релейных схем. *Г. Н. Поваров*

1512. Булева алгебра в синтезе электронных схем. Уошберн (Boolean algebra in electronic circuit design. Washburn S. H.), Electr. Engng, 1954, **73**, № 2, 164 (англ.)

См. реф. 1511.

1513 РЕЦ. Матричный анализ электрических цепей. Лё Корбейе (Matrix analysis of electric networks. Le Corbeiller P., 112 pp., New York, 1950, 3.00 doll.) [**Рецензия: Гёдертье** (Goedertier P.), Rev. questions scient., 1953, **14**, сер. 5, 451—452 (англ.)]

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1514. Использование быстродействующей вычислительной машины для уточнения при определении кристаллической структуры. Томпсон, Каминер, Фантл, Райт, Кинг (The use of a high speed automatic calculator in the refinement stages of crystal-structure determinations. Thompson T. R., Caminer D. T., Fantl L., Wright W. B., King G. S. D.), Acta crystallogr., 1954, **7**, ч. 3, 260—269 (англ.)

Описываются методы уточнения кристаллической структуры с помощью электронной вычислительной машины ЛЕО (LEO — Lyons Electronic Office), построенной фирмой «Лайонс» (J. Lyons and Co. Ltd) в Лондоне (см. реф. 1515).

Машина ЛЕО близка к машине ЭДСАК, являясь универсальной одноадресной машиной последовательного действия с фиксированной запятой и запоминающим устройством на ртутных линиях задержки объемом 2048 кодов по 17 двоичных разрядов каждый. Ячейки запоминающего устройства могут объединяться в пары для запоминания 35-значного кода. Среднее время выборки 0,5 мсек. Сложение двух чисел (с выборкой и записью) выполняется со скоростью 300 действий в 1 сек., умножение — со скоростью 140 действий в 1 сек. Деление осуществляется с помощью подпрограммы. Ввод фотоэлектрический с перфоленты. Результаты могут быть записаны на магнитную ленту или непосредственно выведены на печать.

Рассмотрены два итеративных метода уточнения кристаллической структуры: а) дифференциальный метод Фурье для предварительного уточнения и б) метод кратчайшего спуска для окончательного уточнения. Применение этих методов для случая центральной симметрии проиллюстрировано на примере никотинамида, имеющего 9 атомов, кроме водорода. Для этого кристалла рассматриваются 939 существенных комбинаций hkl. Приводятся краткие схемы программ для обоих методов. Объем используемой памяти (короткие коды):

	а)	б)
программа	1235	1263
раб. ячейки	512	528
таблицы	108	108
Всего	1855	1899

Каждая итерация в методе а) требует выполнения 1 173 781 операций на что необходимо около 24,5 мин., и, кроме того, 3,7 мин. на ввод и 2,0 мин. на печать результатов. Для метода б) соответствующие показатели: 1 585 500 операций (33,1 мин.), 7,5 мин. ввод, 2,0 мин. вывод.

Вкратце описаны применявшиеся методы контроля отдельных стадий вычислений (контрольные суммы, просчет тестов).

Указывается на желательность получения достаточно точных начальных приближений с помощью двумерного анализа, а также на возможность автоматизации перехода от метода а) к методу б).

К. А. Семендяев

1515. Электронная конторская машина фирмы «Лайонс» (Lyons electronic office), Electr. J., 1954, **152**, № 9, 667 (англ.)

Сообщение фирмы «Лайонс» (J. Lyons and Co. Ltd) о выпуске быстродействующей электронной конторской машины ЛЕО (LEO). Общее количество электронных ламп в машине 5000. Машина предназначена для составления платежных ведомостей, подсчета стоимостей, ведения бухгалтерских книг и других конторских работ. Кроме того, на ней можно решать целый ряд математических задач. Так, например, на машине были решены задачи из области баллистики, предсказания погоды, атомной структуры вещества. Платежная ведомость на 1700 человек составляется на машине меньше чем за час.

Программа при составлении платежных ведомостей содержит 20 информаций для каждого служащего и 2 информации для различных групп служащих. Информации на каждого служащего делятся на постоянные, сохраняющиеся на протяжении длительного времени, информации, изменяющиеся в зависимости от зарплаты за предыдущую неделю, и временные, имеющие силу только на данную неделю. Первые два вида информации хранятся на перфокартах, последние набиваются на перфоленте. *Л. С. Легезо*

1516. Электронная конторская машина ЛЕО (LEO — Lyons Electronic Office), Electronic Engng, 1954, **26**, № 314, 162 (англ.)

Сообщение о выпуске электронной конторской машины ЛЕО (LEO — Lyons Electronic Office) (см. реф. 1514, 1515). Дополнительно сообщается, что машина спроектирована на базе машины Кембриджского университета ЭДСАК (EDSAC). В новой машине увеличен объем запоминающего устройства на ртутных линиях задержки до 2048 ячеек и увеличена скорость входного и выходного устройств. Для ввода используются два фототрансмиттера для чтения с перфоленты фирмы «Ферранти» (РЖМат, 1954, 2758) и перфокартный репродуктор фирмы «Голлерит». Для вывода применено печатающее устройство и итоговый перфоратор фирмы «Голлерит». Проектирование машины началось в сентябре

К реф. 1516

1949 г. Нормальная эксплуатация началась в январе 1953 г. Из этого времени 18 месяцев ушло на изготовление и наладку основных узлов машины, а остальное время — на изготовление входного и выходного устройств и комплексную наладку всей машины. Приведено фото машины (см. фото).

Л. С. Легезо

1517. ЛЕО (LEO — Lyons'electronic office), Instrum. Practice, 1954, **8**, № 3, 231—233 (англ.)

Популярно описывается быстродействующая электронная конторская машина фирмы «Лайонс» (J. Lyons and Co. Ltd) (см. реф. 1514—1516). Подробно перечисляются пункты, по которым начисляется зарплата служащим фирмы при составлении машиной платежных ведомостей. *Л. С. Легезо*

1518. Коротко о ЛЕО (LEO — for short), Voice Ind., 1954, 7, № 11, 32—33 (англ.)

Популярное изложение принципа работы быстродействующей электронной конторской машины ЛЕО (LEO). См. реф. 1514—1517. *Л. С. Легезо*

1519. Методы решения линейных алгебраических уравнений и нахождения собственных значений и собственных векторов на цифровых вычислительных машинах. Уилер, Наш (Digital computer methods for solving linear algebraic equations and finding eigenvalues and eigenvectors. Wheeler D. J., Nash J. P.), Digital and Analog Computers and Computing Methods. Symposium at the 18th Appl. Mech. Div. Conf. of the Asme held at the Univ. of Minnesota, June, 18—20, 1953, New York, 1953, 21—35 (англ.)

Краткое описание решения систем линейных алгебраических уравнений и нахождения собствен-

ных значений и собственных векторов на цифровой вычислительной машине Иллинойского университета ИЛЛИАК (ILLIAC) — одноадресной машине с фиксированной запятой, расположенной так, что все числа, находящиеся в машине, по модулю меньше 1.

При решении систем линейных алгебраических уравнений авторы отдают предпочтение обычному методу исключения Гаусса, считая его наиболее экономичным в отношении времени и расхода оперативной памяти (n^2 ячеек памяти для системы n уравнений). Кратко описывается программа, выполняющая исключение неизвестных и обратную подстановку, и приводится ее логическая схема. Так как ИЛЛИАК — машина с фиксированной запятой, то программа предусматривает автоматическое введение масштабных множителей по ходу решения задачи. Полная программа решения системы линейных уравнений содержит кроме того, подпрограммы ввода данных и вывода результатов и перевода чисел из десятичной системы в двоичную и обратно. Программа составлена так, что для решения различного числа уравнений в ней менять ничего не надо: специальная подпрограмма определяет число уравнений n, подсчитывая число элементов в одной строке.

Объем запоминающего устройства машины ИЛЛИАК позволяет решать системы, содержащие до 39 уравнений. Общее время решения, включающее ввод данных и пробивку результатов на перфоленту, не превышает 3 мин.

Для определения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ авторы предлагают по методу Якоби привести эту матрицу ортогональным преобразованием к диагональной форме. Для этого в соответствующей квадратичной форме $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ две переменные x_i и x_k $(i < k)$ подвергаются ортогональному преобразованию

$$x_i = x_i' \cos\theta_1 - x_k' \sin\theta_1, \; x_k = x_i' \sin\theta_1 + x_k' \cos\theta_1.$$

При этом матрица A заменяется матрицей $X_1' AX_1$, где

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\theta_1 & \cdots & -\sin\theta_1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin\theta_1 & \cdots & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

Здесь все неотмеченные диагональные элементы равны единице, а недиагональные — нулю. Величина θ_1 подбирается так, чтобы в новой матрице элемент a_{ik} был равен нулю. При таком преобразовании матрицы A сумма квадратов ее недиагональных элементов уменьшается на величину квадрата аннулируемого элемента a_{ik}.

Над полученной матрицей $X_1'AX_1$ делается преобразование такого же типа и т. д. В этом процессе все недиагональные элементы будут стремиться к нулю, если, например, на каждом этапе для аннулирования выбирать недиагональный элемент с наибольшей абсолютной величиной.

Останавливаясь при достижении достаточного приближения на p-м этапе, мы получим преобразованную матрицу в виде $A^* = X'AX$, где $X = X_1X_2 \ldots X_p$. Диагональные элементы матрицы A^* определят собственные значения матрицы A, а столбцы ортогональной матрицы X дадут ортонормированную систему собственных векторов матрицы A.

Программа отыскания собственных значений и собственных векторов, составленная по этому методу, требует $3n^2/2$ ячеек оперативной памяти. Время решения задачи $n^3/25$ сек. О деталях предлагаемого метода и программы в статье не сообщается. *А. П. Ершов*

1520. БЭСК — шведская цифровая электронная вычислительная машина. Комет (BESK — en svensk elektronisk siffermaskin. Comét Stig), Tekn. tidskr., 1953, 83, № 47, 1007 (швед.)

Сообщение о шведской вычислительной машине БЭСК (BESK—binär elektronisk sekvenskalkylator). БЭСК — машина параллельного типа с фиксированной запятой на 40 двоичных разрядов (включая знак). Внутреннее запоминающее устройство параллельного типа на обычных электростатических трубках (40 трубок) на 512 чисел. Вспомогательное запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 8192 числа последовательно-параллельного типа, имеет 256 каналов по 32 числа в каждом. Передача кодов из магнитного запоминающего устройства в электростатическое, и наоборот, производится блоками по 32 числа (один оборот барабана).

На машине, по утверждению автора, достигнута самая высокая в мире скорость вычислений.

Минимальный цикл, отводимый под операцию (сложение), составляет 60 μсек. Умножение выполняется за 6 таких циклов, что соответствует примерно 3000 операциям в 1 сек.

Ввод данных производится с перфоленты со скоростью 40 чисел в 1 сек., печать результатов производится на телетайпе со скоростью 10 десятичных цифр в 1 сек. Питание машины осуществляется от мотор-генератора, за исключением высокого напряжения (для трубок — *прим. реф.*), снимаемого с шестифазного тиратронного выпрямителя. Полная потребляемая мощность 15 *кв*, полное число ламп 2000. В машине использовано также 300 германиевых диодов.

Первой задачей, которая ставится на БЭСК, будет задача по предсказанию погоды; задачу ставит Стокгольмский метеорологический институт. *Н. Я. Матюхин*

1521. Самая быстрая вычислительная машина (World's fastest computer), Electr. J., 1954, 152, № 2, 127 (англ.)

Сообщение о вводе в эксплуатацию шведской вычислительной машины БЭСК (BESK) (см. реф. 1520), построенной Шведским управлением счетного машиностроения по проекту и под руководством Эрика Стемме (Erik Stemme). БЭСК имеет скорость примерно в 1000 раз большую, чем шведская релейная машина БАРК (BARK) (18 000—20 000 сложений и 3000 умножений в 1 сек.). Указанное число сложений в 1 сек. несколько не соответствует указанному в реф. 1520 времени сложения. Указывается, что в дальнейшем в машине будут добавлены магнитные устройства ввода и вывода. *Н. Я. Матюхин*

1522. БЭСК выполняет полугодовую работу в полчаса. Стернер (BESK gör halvårsjobb på

halvtimme. Sterner Fred W.), Tekn. värld, 1954, № 9, 18 (швед.)

К реф. 1522

См. реф. 1520. Приводится фото запоминающего устройства на трубках Вильямса (см. фото, слева) и накапливающего счетчика (справа).

1523. Электронная цифровая вычислительная машина (Electronic digital computer), Engrs' Digest, 1954, 15, № 3, 115—116 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.) о новой универсальной вычисли-

К реф. 1523

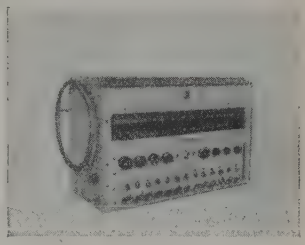
тельной машине типа «203» (см. фото). Запоминающее устройство на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 3600 об/мин, имеет емкость 4800 кодов по 10 десятичных разрядов в каждом. Среднее время выборки 0,85 мсек. Скорость выполнения арифметических операций: сложение (вычитание)—500 операций/сек; умножение — 120 операций/сек, деление—85 операций/сек. Дополнительное запоминающее устройство на магнитной ленте имеет емкость до 1 600 000 десятиразрядных кодов. В качестве входных устройств используется стандартное перфокартное оборудование и устройство фотоввода со скоростью работы 450 знаков в сек. *А. Б. Залкинд*

1524. Новая электронная цифровая вычислительная машина (New electronic digital computer), Mech. Engng, 1954, **76**, № 3, 56 (англ.)

См. реф. 1523.

1525. Модель 30-103. Электрическая вычислительная машина (Model 30-103. Electrical computer), Chem. Engng, 1953, **60**, № 10, 48 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.) об электрической вычислительной машине «модель 30-103» (см. фото). Указывается, что машина решает системы линейных уравнений, может быть использована для обработки данных масс-спектрометров, расчета самолета на флаттер и т. п.



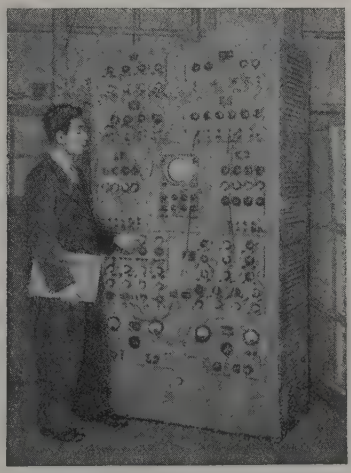
К реф. 1525

1526. Новая электронная вычислительная машина ИБМ-701 (IBM's new «701» electronic calculator), Petrol. Engr, 1953, 25, № 7, A-53, A-55, A-57, A-58 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2375—2377. Приводятся некоторые технические данные и фотографии общего вида и отдельных блоков машины. *В. Д. Князев*

1527. Электронная моделирующая установка. Фудзисава (アナログコンピュータに就いて • 藤沢道雄), 東芝レビュー (Тосиба рэбю), 1953, 8, № 8, 43—56 (япон.; резюме англ.)

Электронная моделирующая установка разработанная исследовательской лабораторией Цуруми (Tsurumi) фирмы «Сибаура Электрик Компани» (Shibaura Electric Co.), предназначена специально для исследования динамики систем автоматиче-



К реф. 1527

ского регулирования и устойчивости вращающихся электрических машин. Установка состоит из электронных решающих усилителей постоянного тока, используемых в качестве сумматоров, интеграторов, блоков перемены знака и разделительных усилителей между пассивными четырехполюсниками.

Пассивные четырехполюсники служат для воспроизведения передаточных функций типичных

звеньев систем автоматического регулирования. Решение осуществляется в ненатуральном масштабе с периодизацией решения и наблюдением результата на экране электронного осциллографа.

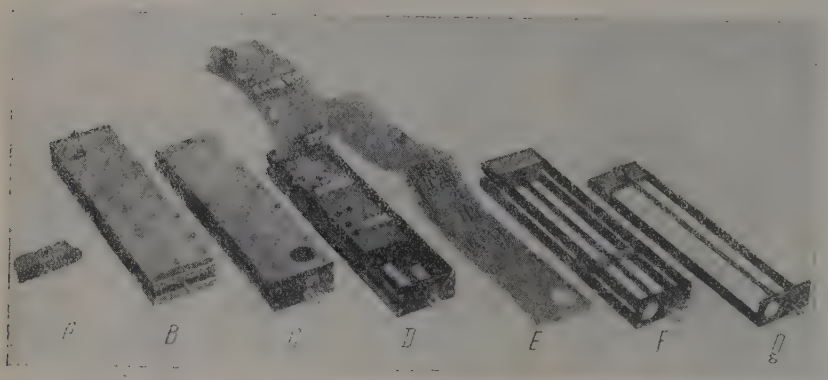
Приводится общий вид установки (см. фото) и пример исследования на модели системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока с магнитным усилителем и амплидином.

Б. Я. Коган

1528. Моделирующее устройство с визуальным выходом для гармонического синтеза. Сатклифф (A harmonic synthesizer with visual display. Sutcliffe H.), Electronic Engng, 1953, 25, № 310, 517—519 (англ.)

Стол, состоящий из двух идентичных частей, содержит 24 генераторных элемента, 312 *RL*- и *RC*-элементов, 42 *R*-элемента, 42 автотрансформаторных и трансформаторных элемента. Соединение элементов производится на двух коммутационных досках. На пульте управления расположен измерительный комплект с устройством для вызова нужного элемента и устройство для дистанционного управления генераторными элементами. Стол обеспечивает измерения с точностью $\pm 1 \div 2\%$. На столе производятся в числе прочих расчеты устойчивости систем методом последовательных приближений. Приведено фото стола и элементов.

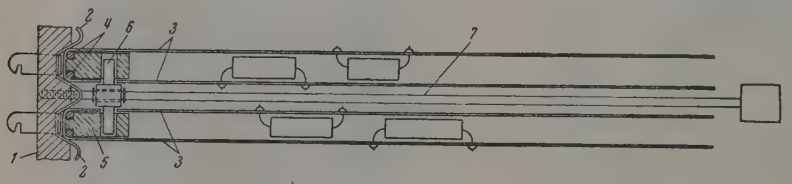
В. Я. Алексеев



К реф. 1530

Фиг. 1

A — резиновая прокладка; *B* — блок, вид сзади; *C* — блок, вид спереди; *D* — открытый блок, видно размещение деталей; *E* — печатная схема (одна из двух, имеющихся на блочке); *F* — каркас блока; *G* — часть каркаса с резиновой прокладкой, крепящим винтом и распоркой.



К реф. 1530

Фиг. 2. Схематический чертеж блока (каркас не показан).

1 — бакелитовая панель; *2* — печатная схема статива (фольга на стеклянном волокне); *3* — печатная схема блочка, согнутая в виде буквы U из того же материала, что и *2*; *4* — резиновые прокладки; *5* — бакелитовые планки; *6* — поводок, передающий давление винта на планки *5*; *7* — крепящий винт.

1529. Расчетный стол переменного тока (Tables à calcul à courant alternatif), Elektrizitätsverwertung, 1953, 28, № 6, 163—168 (франц.)

Описывается расчетный стол переменного тока, который изготовлен в двух экземплярах фирмой «Контрав» (La Contraves S. A., Цюрих, Швейцария) по заказам швейцарской компании «Браун, Бовери» (Brown, Boveri & C-ie) и шведской — «Кунглиге Ваттенфальстюрельсен» (Kunglige Vattenfallsstyrelsen). Стол предназначен для расчета режимов работы действующих энергосистем, а также для расчетов при проектировании новых энергосистем и электрических машин.

1530. Цельно-печатное электронное устройство. Камм (All-printed circuit electronic assembly. Kamm L. J.), Electr. Manufact., 1953, 51, № 6, 152—154 (англ.)

Описывается система сборки печатных схем, разработанная и примененная фирмой «Камм» (L. J. Kamm Co.), для новой вычислительной машины Национального бюро стандартов (США). Печатные схемы использованы как в отдельных блоках, так и при монтаже рам и шкафов. Разъемные соединения также выполнены с помощью печатных контактов, составляющих одно целое со схемами.

В качестве материала для печатных схем употребляется медная фольга, нанесенная на стеклянную пряжу, пропитанную бакелитом. После пропитки ткань по гибкости соответствует жесткой бумаге. Для улучшения качества контактов медь покрывается индием. Схема изготовляется фототравлением (РЖМат, 1953, 1471; 1954, 3148).

На алюминиевом каркасе блока крепятся две печатные схемы, каждая из которых согнута в виде буквы *U*, детали размещаются внутри *U* (фиг. 1). Крепление блока к раме производится винтом *7* (фиг. 2).

Равномерное давление печатных контактов в разъемах обеспечивается резиновыми прокладками. Размеры каждого контакта $1{,}6 \times 1{,}6$ *мм*. На каждой U-образной схеме нанесено 30 контактов (по 15 контактов с каждой стороны).

Каждый блок (содержащий две U-образные схемы) имеет 60 контактов, занимающих общую поверхность 53×29 *мм*. В блоках имеются специальные отверстия для обдува воздухом.

Приведены фотографии.

Л. В. Кутуков

1531. Автоматическая вычислительная машина (Automatic computer), Tele-Tech, 1953, 12, № 11, 84, 141—143 (англ.)

Сообщение о вводе в действие магнитного запоминающего устройства (з. у.) на машине СВАК (SWAC) (РЖМат, 1954, 3094). Магнитный барабан имеет емкость 4096 кодов, по 37 двоичных цифр каждый (з. у. на электростатических трубках имеет лишь 256 адресов). Числа на магнитном барабане записаны последовательно вдоль окружности барабана и вводятся в электростатическое з. у. блоками, причем один блок включает в себя числа, записанные под одной головкой. Время выбора одного числа при передаче блоками составляет 500 μсек. Между числами имеется интервал в три такта, по 13 μсек. каждый. Этого времени достаточно для передачи числа из регистра, куда оно принимается из магнитного з. у., в электростатическое з. у. и для гашения регистра.

Предполагается сделать вспомогательное з. у. на магнитных лентах емкостью 4 000 000 цифр со средним временем выбора одного числа 3,5 мин. Сообщается, что в настоящее время СВАК включает в себя 2000 электронных ламп, 3700 кристаллических диодов, выполняет 16 000 сложений и 2600 умножений в 1 сек. Машина работает 5 дней в неделю по 24 часа в сутки, остальное время занимает профилактический осмотр. *Л. С. Легезо*

1532. Чтение данных, записанных на магнитных сердечниках, без стирания. Бак, Франк (Nondestructive sensing of magnetic cores. Buck Dudley A., Frank Werner I.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 822—830 (англ.)

Двоичная цифра, записанная на ферромагнитном сердечнике с прямоугольной гистерезисной петлей в виде остаточной индукции того или иного направления, может быть прочитана с помощью продольного перемагничивающего или поперечного магнитного поля.

В первом случае после считывания ранее записанная информация не сохраняется в сердечнике. Для восстановления информации в этом случае необходим специальный цикл регенерации. При чтении с помощью поперечного поля восстановление прочитанной информации осуществляется за счет собственных свойств ферромагнетика.

Исследование ферритовых сердечников и сердечников из пермаллоя показывает, что легко получить время выборки информации из одного сердечника менее 1 μсек. (при экспериментах для чтения использовались треугольные импульсы тока длительностью 0,2 μсек. с амплитудой 0,6 *a* и 0,64 *a*; при этом напряжение на выходной обмотке достигает нескольких вольт).

Амплитуда импульсов выходного напряжения несколько падает при повторном чтении, стремясь к некоторой установившейся величине, для достижения которой может быть достаточно 15 читающих импульсов. Установившаяся амплитуда сохраняется при числе повторных чтений 10^7 и более.

Применение нового метода в быстродействующих вычислительных машинах позволит производить вывод промежуточных результатов из матричного запоминающего устройства произвольно, не прерывая процесса вычисления. Статические магнитные регистры могут не иметь специальной регенерации, как и запоминающее устройство. Ферритовые сердечники, кроме того, могут одновременно выполнять логическую операцию «и» при работе с двумя поперечными полями. *О. В. Росницкий*

1533. Преодоление трудностей (Cracking the computer barrier), Western Aviat., 1954, 34, № 1, 14 (англ.)

Фирмой «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research, Inc.) сконструировано запоминающее устройство на магнитном барабане диаметром 120 *см*, вращающемся с большой скоростью (РЖМат, 1955, 470—471). Емкость этого запоминающего устройства примерно 1 000 000 кодов. *В. В. Карибский*

1534. Диодно-емкостное запоминающее устройство для вычислительных машин. Холт (Diode-capacitor memory for computers. Holt Arthur W.), Radio and Telev. News. Radio-Electronic Engng Ed., 1954, 50, № 2, 20, 32—33 (англ.)

Используемые типы запоминающих устройств (з. у.) не обладают достаточно малым временем выбора, чтобы можно было максимально использовать возможности арифметического узла вычислительной машины. В этом отношении диодно-емкостное з. у. их превосходит. Например, из з. у. на акустических трубках можно выбрать 6000 кодов в 1 сек., из з. у. на электроннолучевых трубках — 60 000 кодов в 1 сек., а из диодно-емкостного з. у.— 100 000 кодов в 1 сек. Ячейка з. у. состоит из конденсатора, зарядного сопротивления и двух диодов. Положительный заряд конденсатора соответствует единице, отрицательный — нулю. С помощью диодов осуществляется считывание сигнала, при этом конденсатор разряжается на сопротивление, и сигнал, снимаемый с сопротивления, управляет цепью регенерации, восстанавливающей содержимое ячейки. Выходы всех ячеек с одинаковым номером разряда соединены параллельно и поданы на один усилитель. Таким образом, количество усилителей равно количеству разрядов з. у. Импульс чтения подается на шины всех ячеек одного адреса одновременно, и так как в момент чтения шины ячеек остальных адресов заперты, то он и определяет выбор адреса з. у. Система выбора адресов может состоять из обычной диодной матрицы, но она требует больших опорных токов, тем более что шины чтения потребляют очень большой ток, равный сумме разрядных токов всех конденсаторов одного адреса. Поэтому применяется трансформаторно-диодная матрица (матричный селектор), не требующая больших опорных токов.

Диодно-емкостное з. у. на 128 адресов и 8 разрядов было сделано и работало в машине СВАК совместно с акустическим з. у. При испытаниях в течение 12 час. оно не дало ни одного сбоя. Лабораторный макет з. у. хранил информацию в течение 1 недели. *Л. С. Легезо*

1535. Экспериментальное быстродействующее запоминающее устройство на диодах и конденсаторах. Холт (An experimental rapid access memory using diodes and capacitors. Holt A. W.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 133—141 (англ.)

Описывается экспериментальная установка нового типа быстродействующего запоминающего устройства (з. у.). Запоминающим элементом з. у. является обычный конденсатор, заряжаемый через диоды

напряжением положительной или отрицательной полярности (1 или 0) (см. реф. 1534).

В настоящее время конструируется з. у., характеризуемое следующими данными: 1) матричный селектор, обеспечивающий возможность выбора одного из 256 45-значных кодов; имеет 32 лампы типа 6AN5, схема собрана печатным способом; 2) емкость з. у. 128 8-значных кодов, причем возможно расширение до 255 45-значных кодов (2 диода и 1 конденсатор на знак); увеличение количества знаков в коде требует соответствующего увеличения количества считывающих вентилей-усилителей (3 лампы 6AN5 на каждый усилитель).

Указывается, что каждый усилитель при использовании германиевых диодов может обеспечить работу от 32 до 64 ячеек, при использовании селеновых диодов — от 256 до 512 ячеек. Опыты, проведенные с кремниевыми диодами, показывают возможность обслуживания одним вентилем-усилителем до 10 000 ячеек с уровнем ложных сигналов порядка 0,1.

Преимуществом описанной системы перед акустическим з. у. и з. у. на электроннолучевых трубках является исключительная простота конструкции и нечувствительность к вибрациям. Надежность этого типа з. у. значительно выше других существующих в настоящее время типов параллельного быстродействующего з. у.

Разрабатываемая сейчас конструкция рассчитана на запись и выборку до 20 000 кодов в 1 сек. Вообще же скорость, повидимому, может быть доведена до 100 000 кодов в 1 сек. *Л. В. Кутуков*

1536. ФОСДИК — фотооптическая система для ввода данных в вычислительную машину. (FOSDIC — a film optical sensing device for input to computers), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1954, **38**, № 2, 24—27 (англ.)

Приводятся основные технические данные и принцип действия устройства ФОСДИК (FOSDIC — Film Optical Sensing Device for Input to Computers), разработанного сотрудниками Национального бюро стандартов по заказу Бюро переписи. ФОСДИК считывает информацию с микроснимка, являющегося копией документа. Специальные знаки (зачерненные овалы), которые может считывать ФОСДИК, на документе могут наноситься любым пером или карандашом. Читаемые знаки преобразуются устройством ФОСДИК в электрические импульсы, подаваемые на устройство для записи на магнитную ленту. Использование устройства ФОСДИК резко уменьшает время и затраты на приготовление исходных материалов. ФОСДИК спроектирован для обработки результатов переписи, но может быть легко использован для ввода любого типа информации, поступающей в больших количествах. Особенно важно применение ФОСДИК'а для вычислительных устройств, которые выполняют относительно небольшие вычисления с большим числом исходных данных, получаемых из разных источников. Указывается на то, что ранее уделялось недостаточно внимания разработке устройств, подготавливающих исходные данные для введения в вычислительную машину. К таким устройствам можно было отнести лишь различные виды телетайпов и перфораторов.

Приводится краткое описание блок-схемы устройства ФОСДИК. Микропленка кадр за кадром протаскивается перед объективом. Освещение пленки производится посредством электроннолучевой трубки, на пластины которой подаются соответствующие развертки по строке и кадру. Каждый кадр является микроснимком листа размером от 35 до 40 *см*. Под микропленкой помещен фотоэлемент, на выходе которого получаются электрические импульсы, соответствующие знакам на пленке. Максимальная емкость одного листа 2800 знаков (предел различимости). Время на «обзор» кадра от 0,5 до 0,9 сек. Полное время, приходящееся на один кадр, 1,25 сек. Средняя скорость прохождения информации 2000 двоичных знаков или 250 десятичных знаков в 1 сек. Все устройство помещается в четырех блоках, каждый из которых имеет высоту 105 *см*. Устройство для магнитной записи на 8-канальную ленту помещается отдельно. Монтаж выполнен в виде отдельных шасси на шарнирных подвесках. В ФОСДИК'е производится подсчет считываемых колонок, и если одна из них будет отсутствовать по какой-либо причине, то ФОСДИК дает команду вычислительной машине, означающую, что правильность исходных данных в соответствующем месте сомнительна и требует дополнительной проверки. Приводятся фото микропленки, соответствующей ей магнитной ленты и листа документа, а также блок-схема устройства ФОСДИК, вид отдельных блоков, панелей, монтажа. *А. Б. Залкинд*

1537. ФОСДИК — фотооптическое устройство для ввода данных в вычислительную машину (FOSDIC — a film optical sensing device for input to computers), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 5, 399—402 (англ.)

См. реф. 1536.

1538. ФОСДИК (FOSDIC), Tech Engng News, 1954, **35**, № 4, 42, 44, 46 (англ.)

См. реф. 1536.

1539. Фотооптический прибор преобразует информацию для ввода в вычислительную машину (Film optical sensing device processes information for input to computers), Electr. Engng, 1954, **73**, № 2, 184—185 (англ.)

См. реф. 1536.

1540. ФОСДИК читает значки (FOSDIC feeds figures), Electronics, 1954, **27**, № 2, 236, 238 (англ.)

См. реф. 1536.

1541. ФОСДИК (FOSDIC), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 1, 34 (англ.)

См. реф. 1536.

1542. ФОСДИК — фотооптический прибор для ввода данных в вычислительную машину (FOSDIC — a film optical sensing device for input to computers), J. Opt. Soc. America, 1954, **44**, № 2, 177—178 (англ.)

См. реф. 1536.

1543. Магнитная запись в вычислительных машинах. Ремон, Альбен (L'enregistrement magnétique dans le domaine des machines à calculer. Raymond F.-H., Albin J.), Onde électr., 1954, **34**, № 324, 291 (франц.)

1544. Быстродействующие магнитные усилители с предварительным намагничиванием. Хаус

(Flux preset high-speed magnetic amplifiers. House C. B.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 728—735 (англ.)

Приводятся результаты развития теории и практического применения быстродействующих магнитных усилителей в Военно-морской научно-исследовательской лаборатории (США).

Показано, что магнитный усилитель, имеющий время установления, равное половине периода питающего напряжения, может быть построен на сердечниках с любой формой петли гистерезиса. Для этого дополнительно к основной управляющей цепи, которая размагничивает сердечник во время нерабочего цикла (resetting control circuit), вводят другую управляющую цепь, осуществляющую намагничивание сердечника во время того же цикла (presetting control circuit). Введение дополнительной управляющей цепи позволяет, кроме того, компенсировать влияние обратной активной и емкостной проводимостей вентиля в цепи нагрузки усилителя, имеющего сердечник с прямоугольной петлей гистерезиса.

Эксперименты с простейшим полупериодным усилителем на частоте 60 *гц* подтверждают эти возможности. *О. В. Росницкий*

1545. **Быстродействующие магнитные усилители. Скорджи** (Fast response with magnetic amplifiers. Scorgie D. G.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 741—749 (англ.)

Магнитные усилители с самонасыщением обладают высоким отношением коэффициента усиления к постоянной времени. Использование обратных связей в таких усилителях позволяет получить высокое входное сопротивление усилителя, поэтому целесообразно подходить к анализу подобных цепей, как к цепям, управляемым напряжением, а не током, так как зависимость среднего тока нагрузки от среднего управляющего тока получается нелинейной (например, типа S) при линейной зависимости от управляющего напряжения. Управление усилителем может осуществляться как постоянным, так и переменным напряжением, а также изменением активного сопротивления управляющей цепи.

Усилители по мостовой схеме могут иметь время установления, равное половине периода питающего напряжения независимо от формы гистерезисной петли сердечника. Однако использование сердечника с прямоугольной петлей гистерезиса позволяет повысить входное сопротивление усилителя путем подключения ко входу усилителя источника постоянного тока.

Приведены некоторые конкретные схемы усилителей и результаты их испытания.

Библиография, 9 названий. *О. В. Росницкий*

1546. **Магнитный усилитель для синхронной передачи. Ван-Аллен** (A magnetic amplifier for synchros. Van Allen R. L.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 749—757 (англ.)

Линейность передаточной характеристики, а также однотипность управляющей и нагрузочной цепей магнитных усилителей со временем установления, равном половине периода питающего напряжения, позволяют создать на базе этих усилителей промежуточные усилители для синхронной передачи.

В созданной демонстрационной установке для передачи одной угловой координаты применяется группа магнитных усилителей, использующих в общей сложности 12 сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса. Условия работы такой системы оказываются наиболее выгодными, когда угловая координата передается на несколько сельсинов-приемников, соединенных параллельно. В данном случае при передаче угла на 18 сельсинов-приемников, соединенных параллельно, статическая и динамическая ошибки оказываются одного порядка с ошибками при передаче угла непосредственно, без магнитных усилителей, на один сельсин-приемник. Кроме того, при передаче на 18 сельсинов-приемников максимальный момент вращения на валу сельсина-приемника получается вдвое больше по сравнению с моментом при непосредственной передаче на 2 сельсина-приемника.

В дискуссии по статье отмечается, что в описании эксперимента есть детали, объяснения которым нет в статье. *О. В. Росницкий*

1547. **Управление магнитными усилителями с помощью полупроводниковых триодов. Питман** (Transistor control of magnetic amplifiers. Pittman G. F., Jr), Radio and Telev. News. Radio-Electronic Engng Ed., 1954, **51**, № 2, 13—15, 30, 31 (англ.)

Рассматривается вопрос о целесообразности применения полупроводниковых триодов для управления магнитными усилителями с самонасыщением.

Указывается, что применение полупроводникового триода для предварительного усиления мощности, подводимой ко входу магнитного усилителя, повышает отношение коэффициента усиления по мощности ко времени установления.

Высокое выходное сопротивление полупроводникового триода благоприятно отражается на работе магнитного усилителя, так как приводит к уменьшению токов, индуктированных в управляющей цепи источником питания. Полупроводниковый триод, кроме того, может использоваться как регулируемое сопротивление в магнитных усилителях, управляемых по этому принципу. Выводы автора не подкрепляются математическим анализом цепей, о которых идет речь.

При экспериментах на частоте 60 *гц* со слоевым триодом типа *p-n-p* получен коэффициент усиления по мощности 22 000 при времени установления в один период.

Отмечается, что вопрос о широком применении полупроводниковых триодов для управления магнитными усилителями есть вопрос будущего, так как в настоящее время полупроводниковые триоды не обладают такой же надежностью, как магнитные усилители. *О. В. Росницкий*

1548. **Танталовые конденсаторы** (Tantalum capacitors), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 4, 160A (англ.)

Сообщение фирмы «Фанстил Металлурджикал» (Fansteel Metallurgical Corp.) о выпуске танталовых электролитических конденсаторов на емкости от 1,5 *мкф* до 30 *мкф* с рабочими напряжениями до 125 *в* постоянного тока. Диапазон рабочих температур лежит от —55° до + 85°. Объем конденсатора не превышает 1,6 *см*³. Приведено фото. *В. А. Зимин*

1549. **Понятие о полупроводниковом триоде. Монтефинале** (Nozioni sul transistor. Montefinale G.), Riv. marittima, 1954, **86**, № 2, 282—311 (итал.)

1550. Об использовании германиевых диодов (Několik dalších použiti germaniových diod), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 5, 140—141 (чеш.)

1551. Полупроводниковый триод. Банфи (I transistori. Banfi Alessandro), Antenna, 1953, **25**, № 10, 273—274 (итал.)

1552. Выпрямители из кристаллов германия (Raddrizzatori a cristallo di germanio), Antenna, 1954, **26**, № 3, 77—78 (итал.)

1553. Кристаллические триоды-транзисторы. Патек (Krystalové triody-transistory. Pátek Karel), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 3, 86—88 (чеш.)

1554. Термисторы, транзисторы и другие полупроводниковые приборы. Лундквист (Termistorer, transistorer och andra halvledarelement. Lundqvist Dick), Kosmos (Stockholm), 1953, **31**, 39—66 (швед.)

1555. Работа полупроводникового триода. Бхатия (The transistor action. Bhatia R. N.), Sci. and Culture, 1953, **19**, № 5, 237—240 (англ.)

Популярная статья. Рассматривается устройство и принцип действия полупроводниковых триодов.

1556. Чехословацкие германиевые диоды. Франк, Шнейдар (Tuzemské germaniové diody. Frank H., Šnejdar V.), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 1, 2—4 (чеш.)

1557. Конвертер для применений в области полупроводниковых электронных приборов (Converter for transistor applications), Electronics, 1953, **26**, № 10, 364—365 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Электроник Рисёрч Ассошиэйтс» (Electronic Research Associates) о предстоящем выпуске конвертера модели CC-60. Конвертер включается последовательно со стандартным источником питания любого напряжения от 85 до 300 *в* и поддерживает на выходе постоянную с точностью до 2% силу тока, регулируемую в пределах от 0 до 50 *ма* при напряжении от 0 до 150 *в* (бо́льшие значения тока получаются для напряжения питания 300 *в*); постоянство тока поддерживается в широких пределах изменения нагрузки и обеспечивается применением отрицательной обратной связи по току. Габариты прибора 100 × 125 × × 150 *мм*. Приведено фото.

1558. Основные узлы механических счетно-решающих устройств. Уинг (Mechanical computer components. Wing Willis G.), Wisconsin Engr, 1953, **58**, № 3, 28—31, 40, 44, 46 (англ.)

Дается популярно изложенное описание принципиальных кинематических схем некоторых механизмов, моделирующих математические операции над непрерывно вводимыми величинами, и указывается, что эти же механизмы обычно входят в качестве основных узлов в более сложные счетно-решающие устройства непрерывного действия как, например, приборы управления артиллерийским огнем и др.

В частности, рассмотрены рычажные и колесные дифференциалы, осуществляющие операции сложения и вычитания, рычажный множительный механизм, преобразователь координат, фрикционные интегрирующие устройства и эксцентриковый механизм для получения поступательного перемещения, пропорционального данной произвольной функции аргумента. *А. Б. Штыкан*

1559. Счетная линейка для расчета диафрагмы. Лонг (The diaphragm slide rule. Long Henry R.), Nat. Lithographer, 1953, **60**, № 8, 34—37 (англ.)

Устройство и употребление номограммы, рекомендуемой для некоторых вычислений при расчете фотообъектива. *В. М. Брадис*

1560. Специальное применение логарифмической линейки в химии. Цзюй Дин-и (普通計算尺在化工上幾個特殊用法的介紹. 璩定一), 化學世界 (Хуасюэ шицзе), 1954, **9**, № 5, 188—190, 204 (кит.)

1561. Может ли думать «думающая машина»? Сведберг (Kan elektronhjärnor verkligen tänka? Svebderg Bengt), Industritidn. norden, 1953, **81**, № 20, 294, 298 (швед.)

1562. Будущее робота (Roboten framtidens slav), Tekn. alla, 1954, **15**, № 3, 4, 5, 20, 22, 24 (швед.)

1563 К. Учет и нормирование материальных запасов в промышленном предприятии с применением счетных машин. Исаков В. И., 228 стр., Госстатиздат, М., 1953, 7 р. 15 к.

1564 К. Полупроводниковый триод с поверхностным контактом. Кинман (The junction transistor. Kinman Thomas Hilary, 4 pp., British Thomson-Houston Co., Ltd., Rugby, 1954), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 213, 10 (библ.)

1565 К. Счетная линейка для экономистов. Лившиц Ф. Д. (Пособие для работников статистики, учета и планирования), 176 стр., Госстатиздат, М., 1954, 5 р. 50 к.

1566 П. Релейное устройство для счета и хранения данных. Хеммингер (Counting and registering relay circuit. Hemminger Paul) [Kellogg Switchboard and Supply Co.]. Пат. США 2624785, кл. 175—320, 6.01.53

Устройство состоит из цепей счетных реле и реле хранения данных. Каждое счетное реле может возбудить соответствующее ему реле хранения данных. Цепь реле хранения данных имеет одно дополнительное реле, возбуждающееся от последнего импульса серии, в которой число импульсов на единицу больше числа счетных реле. *Н. Ф. Семикова*

1567 П. Устройство для включения счетного механизма. Врум (Resetting means for counter mechanism. Vroom Harold B.) [Veeder-Root Inc.]. Пат. США 2630971, кл. 235—144, 10.03.53

1568 П. Матричная система хранения. Поттер (Matrix storage system. Potter John T.). Пат США 2624786, кл. 175—321, 6.01.53

Устройство для считывания с перфокарт с помощью фотоэлементов, снабженное тиратронной матричной схемой, управляемой фотоэлементами, для запоминания содержимого перфокарты.

Е. И. Мамонов

1569 П. **Система импульсной многоканальной радиосвязи** (Pulse multiplex system) [International General Electric Co. Inc.]. Австрал. пат. 153033, кл. 05.5, 17.09.53

1570 П. **Демодулятор для системы связи с импульсно-кодовой модуляцией. Питерсон** (Decoder for pulse code modulation communication systems. Peterson Eugene) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2650299, кл. 250—27, 25.08.53

Демодулятор для системы связи с импульсно-кодовой модуляцией выполнен в виде специальной электронолучевой трубки. Трубка имеет электронную пушку, отклоняющие пластины, электрод для радиального отклонения луча, мишень и коллектор. Внешняя схема развертки работает на обе пары отклоняющих пластин, заставляя луч с заданной частотой перемещаться по замкнутой кривой (в частном случае — по кругу). Мишень целиком лежит вне кривой, описываемой лучом, и электроны луча не попадают на нее. Импульсные сигналы, приложенные к электроду радиального отклонения луча, вызывают увеличение размера кривой, описываемой лучом, и, следовательно, облучение мишени. Мишень выполнена так, что какой бы ни был размер кривой, описываемой лучом, время облучения мишени остается постоянным (например, для круговой развертки мишень изготовляется в виде кольцевого сектора, концентричного оптической оси трубки).

Постоянная времени нагрузки мишени выбрана таким образом, что получаемое на ней напряжение пропорционально числу, представляемому каждой кодовой группой. *В. Н. Лаут*

1571 П. **Машина для перфорирования и нумерации перфокарт. Кэрролл** (Record card punching and numbering machine. Carroll Fred M.)[International Business Machines Corp.]. Пат. США 2645994, кл. 101—19, 21.07.53

Машина состоит из магазина карт, пробивного устройства, печатающего механизма для печати последовательных номеров на перфокартах, транспортного механизма для подачи карт и механизма укладки карт. Механизм укладки карт снабжен счетчиком, управляющим укладкой карт в группы с заранее определенными номерами. При отсутствии карт в печатающем механизме счетчик механизма укладки карт и механизм установки печатающих колес отключаются. *Н. Ф. Семикова*

1572 П. **Множительный механизм. Досон** (Multiplying mechanism. Dawson Edward) [Sperry Corp.]. Пат. США 2624506, кл. 235—61, 6.01.53

Десятичный механический множительный механизм.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

1573. **Автоматизация станков. Ч. 1. Каплан** (Automation of machine tools. Part 1. Kaplan Julius Y.), Tool Engr, 1953, **30**, № 4, 53—60 (англ.)

Дается описание принципов автоматического контроля станков и предлагаются новые принципы, основанные на применении записи инструкций для управления станком на магнитной ленте.

В отличие от разомкнутых систем управления, системы с замкнутой обратной связью обладают свойством автоматического контроля точности выполнения станком заданной инструкции. Эти системы не допускают ошибок в выполнении заданной инструкции выше определенного предела. Приведен пример разомкнутой и замкнутой систем управления скоростью движения стола фрезерного станка.

Новыми способами управления станком являются способы записи необходимой для станка информации на перфоленте (РЖМат, 1954, 2758), кинопленке или магнитной ленте. Последняя имеет существенные преимущества, так как она позволяет запоминать как цифровые данные, так и непрерывно меняющиеся электрические напряжения и обладает большой емкостью запоминания. Магнитная лента с закодированной на ней программой осуществляет управление станком при изготовлении детали по заданному профилю. Согласно записанным на ней инструкциям, станок останавливается после завершения обработки детали, деталь перемещается под другой режущий инструмент станка и т. д. Высокая производительность станка может быть получена путем наиболее рационального программирования работы станка с записью программы на магнитном барабане, магнитной ленте или перфоленте. Закодированная программа с помощью преобразовательных устройств превращается в электрическое напряжение, управляющее станком обычными способами. Путем смены рулонов лент можно обеспечить производство различных деталей.

Простейшим применением магнитной ленты может быть запись на ней трех напряжений обычного сельсина-датчика, задающего величину механического перемещения, и воспроизведение этих напряжений для управления сельсином-приемником. Наиболее пригодными способами такой записи являются следующие: 1) запись сигналов с импульсной модуляцией, 2) фазомодулированные сигналы и 3) частотно-модулированные сигналы.

Запись напряжений в виде двоичного кода импульсов может быть снова преобразована в напряжение. На других дорожках ленты могут быть записаны в виде импульсов программы операций, которые должны быть произведены в соответствии с производственным процессом. Таким образом при помощи ленты можно управлять целым рядом операций станка и обеспечить его максимальную производительность. Трудности, возникающие при применении магнитной ленты, заключаются в случайных потерях записанных импульсов при их считывании вследствие неоднородности ленты, попадания частиц металла, пыли, вибраций сервопривода и т. д. Потеря хотя бы одного записанного импульса при считывании может привести к пропуску важной операции и к ошибкам счета их. В настоящее время фирмами, выпускающими магнитную ленту, ведутся исследования с целью выпуска специальной магнитной ленты для автоматического управления.

Запись фазомодулированных электрических напряжений обладает простотой устройства. Она нечувствительна к неоднородности и дефектам магнитной ленты, которые при этом способе записи вызывают дополнительный фон (шум), устраняемый с помощью фильтра.

Приведена блок-схема управления узлом станка, в которой величина необходимого смещения узла задается фазомодулированным сигналом, записанным на магнитной ленте. Сельсин, механически связанный с узлом, измеряет действительное смещение узла. Выходное напряжение сельсина превращается в фазомодулированный сигнал, который вместе с сигналом с магнитной ленты поступает на фазовый детектор, вырабатывающий напряжение рассогласования, управляющее через усилительное устройство приводом узла. В такой системе на одной ленте может быть записано до десяти—двадцати каналов информации. Для нанесения необходимой информации на ленту предлагается записывать напряжения с сельсинов, установленных на станке, в процессе обработки детали высококвалифицированным рабочим.

При соответствующем резерве мощности станка и прочности инструмента воспроизведение такой ленты в системе автоматического управления, а следовательно, и обработка деталей могут производиться со скоростью, в 2—3 раза большей чем при записи процесса.

Также может быть применена запись частотно-модулированных напряжений, на которую качество ленты не влияет. В системе с частотной модуляцией величина угла поворота выходного вала превращается в частотно-модулированный сигнал с помощью сопротивления или емкости, пропорциональных этому углу и управляющих частотой колебаний генератора. Для преобразования входного сигнала в напряжение, соответствующее углу поворота вала, применяется обычный частотный детектор.

Во второй части статьи будет дано применение этой техники для управления станками.

Ф. В. Майоров

1574. Вычислительные машины в промышленности и торговле. Лессинг (Computers in business. Lessing Lawrence P.), Scient. Amer., 1954, 190, № 1, 21—25 (англ.)

Большие вычислительные электронные машины, ранее применявшиеся только в вычислительных лабораториях, начинают применяться для решения коммерческих задач.

В настоящее время, по утверждению автора, в США имеется около 30 больших электронных вычислительных машин, используемых главным образом для решения научных задач. Причиной их малого приспособления для коммерческих задач является не только их стоимость, но и различный характер работы.

Научные задачи обычно включают в себя большое количество вычислений со сравнительно малым количеством данных по небольшому количеству правил. Большая часть коммерческих задач характеризуется большим количеством данных, а также несложными, но весьма разнообразными вычислениями.

В настоящее время делаются попытки программировать коммерческие задачи для больших вычислительных машин. Целесообразность применения электронных вычислительных машин для решения коммерческих задач иллюстрируется на примере применения машины «Дистрибьютон» или «Спид Толли» (Distributon, Speed Tally; см. реф. 1575). Эта машина была построена отделением ИРА (ERA) фирмы «Ремингтон Ранд» для Чикагской фирмы «Дж. Плейн и К°» (John Plain and Co.), выполняющей почтовые заказы.

Фирма «Дж. Плейн» продает около 8000 наименований товаров по каталогу приблизительно через 1000 различных торговцев, в большинстве провинциальных. Торговля сезонная, колеблющаяся от 2000 до 15 000 заказов в день. Компания должна следить за продажей и рассылать товары, когда это необходимо. Для ведения учета использовалась большая группа служащих, которые записывали каждый заказ с контрольной пометкой против каталожного номера на карте и затем регистрировали итоги с сотен карт каждую неделю на сводной карте. В последний сезон компания заменила 60 служащих машиной «Дистрибьютон» и 10 операторами.

Машина состоит из запоминающего устройства на магнитном барабане и малого арифметического и управляющего устройства, к которому присоединяются 10 входных блоков — клавиатур. Емкость барабана 39 000 ячеек. На барабане записываются количества товаров в местах, соответствующих их каталожным номерам. Когда учитывается новый заказ, оператор вводит с клавиатуры количество товара и его каталожный номер, машина отыскивает по каталожному номеру предыдущий итог и прибавляет или вычитает новое количество, возвращая полученный результат на барабан (в место, соответствующее данному каталожному номеру). Эта операция занимает 2/5 сек. Машина может обрабатывать 90 000 товарных карточек в день. Чтобы получить сумму проданного по любому товару, оператор набирает нуль и каталожный номер товара и сумма выводится на панель неоновых ламп. Для охвата продажи более чем по одному товару машина имеет отдельный выходной блок, в котором печатаются суммы проданных товаров и их каталожные номера на бумажной ленте. Каждую ночь машина запускается и печатает результаты дневной торговли по всем 8000 наименований товаров каталога. С небольшими изменениями в типе ввода и вывода эта же машина может выполнять много других задач товарного учета, планирования и т. д.

В настоящее время готовятся к серийному выпуску модели машин фирм «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) и ИБМ, приспособленные к большому разнообразию коммерческих работ.

В машине фирмы ИБМ (РЖМат, 1954, 4618) запоминающим устройством является магнитный барабан емкостью до 20 000 цифр и до 2000 отдельных рабочих команд. Он может хранить целые таблицы для вычислений страховых полисов, накладных за фрахт, учета векселей и т. д., а также производственные программы для планирования поступления материалов и деталей. Цены за вычислительные машины с магнитным барабаном устанавливаются в диапазоне 50 000—100 000 долларов или, в случае аренды, от 500 до 1000 долларов в месяц.

Решение многих коммерческих задач на малых вычислительных машинах разбивается на ряд ступеней. Большие электронные машины могут сочетать много ступеней или решать ряд различных задач в любой последовательности. Их цена колеблется в диапазоне 800 000—1 000 000 или около 10 000 долларов арендной платы в месяц. До сих пор только две организации выпускают промышленные

машины этого типа, — это фирмы «Ремингтон Ранд» и ИБМ. Фирма «Ремингтон Ранд» выпускает машины УНИВАК и ИРА-1103, а фирма ИБМ — машину 701 (РжМат, 1954, 1853—1854, 2375). Предполагается выпуск в этом году 6 машин УНИВАК, 6 машин ИРА-1103 и 18 машин ИБМ-701.

Эти машины главным образом предназначаются для решения научно-технических задач. Ожидается объявление о коммерческой модификации машины ИБМ-701. На этих машинах решался ряд коммерческих задач. Например, компания «Дуглас» использовала машину ИБМ-701 для планирования распределения рабочей силы (компании «Дуглас» было предложено несколько правительственных заказов, каждый из которых требовал некоторой специфики в распределении технического персонала). При известных данных о количестве специалистов по аэродинамике, теории прочности и по другим областям техники нужно было найти наиболее рациональный порядок выполнения заказов. Вычислительная машина, получив данные о персонале, условиях заказов и программу решения, дала семейство графиков использования рабочей силы меньше чем через час. Химическая компания «Монсанто Кемикл» (Monsanto Chemical Co.) поставила перед вычислительным центром ИБМ задачу вычисления стоимости продуктов. Необходимо было вычислить влияние накладных расходов, расходов на энергию, служебных расходов и т. д. на стоимость определенного химического продукта. В таких областях, как химическая и нефтяная промышленность, выпускающих много различных продуктов, калькуляция стала настолько сложной, что действительная стоимость продукта часто неизвестна. Задача, которую поставила компания «Монсанто Кемикл», потребовала решения большой системы линейных уравнений и около 400 000 арифметических операций. Таблица стоимости продукта на машине ИБМ-701 была получена в течение нескольких часов. Кампания «Монсанто Кемикл» заказала коммерческую модификацию ИБМ-701 для подготовки калькуляции приблизительно по 1200 продуктам, для вычисления квартальных отчетов и т. д.

Аналогичные вычисления ведутся также различными банками. Банки должны вести непрерывные записи всех сделок, должны показывать по требованию все операции, производимые с банковскими счетами, а также должны приводить счета к количествам, записанным на чеках вкладчика.

Вычислительные машины могут выполнять первые две из этих работ. Магнитная лента и усовершенствованное печатающее устройство могут обеспечить непрерывную запись. Техника телевидения может помочь в решении вопроса о показе счетов клиентов.

Первое действительное совместное решение задачи учета и планирования в одной большой вычислительной системе будет иметь место в этом году, когда фирма «Дженерал Электрик» установит машину УНИВАК в новой группе заводов в Луисвилле для ведения всей заводской бухгалтерии. Цель создания группы заводов состоит в централизации всех разбросанных в настоящее время заводов, производящих электротехническое оборудование, в одном месте, что уменьшит затраты на руководство, перевозки и т. д. Чтобы осуществить такой огромный комплекс, необходим новый порядок централизованного контроля.

«Дженерал Электрик» взяла в аренду сроком на 2 года машину УНИВАК и в ближайшее время начинает выполнять на ней различные коммерческие и вычислительные работы. Первой работой будет составление ведомостей зарплаты. В машину будут введены данные по нескольким тысячам работников, будут введены также команды по уровню заработной платы, сверхурочным, вычетам и т. д. Машина за 4 часа вычислит зарплату каждого рабочего и автоматически напечатает ведомости зарплаты и чеки. Второй группой вопросов будет определенная программа канцелярских работ, таких как составление графиков распределения расходов, планирование поступления материалов и проверка графиков выпуска продукции по всем отделам. Позже машина будет составлять ведомости продажи и подготавливать счета. В 1954—1955 г. машина УНИВАК будет использована также для ведения отчетности всего комплекса заводов. Возможно, отдел программирования будет также ставить решение задачи об учете спроса и продажи товаров с целью достаточно быстрого соответствующего изменения производства.

Две страховые компании «Метрополитен Лайф» (Metropolitan Life) и «Франклин Лайф» (Franklin Life) также скоро пустят в работу машины УНИВАК для решения задач статистики, подсчета страховых премий, подготовке чеков дивидентов и т. д.

Весьма важным при решении экономических задач является вопрос надежности и контроля. Кроме того, само программирование является весьма трудным и может отнять большое время. Тем не менее ведутся серьезные работы в этом направлении, так как применение вычислительных машин в области экономики даст не только экономию времени, но более высокую производительность управления предприятиями. *Л. М. Шехтман*

1575. Магнитное запоминающее устройство для коммерческих целей (Magnetic memory goes commercial), Prod. Engng, 1954, 25, № 2, 154—159 (англ.)

Сообщается о выпуске фирмой «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) устройства «Спид Толли» (Speed Tally System) для обработки, систематизации и хранения торговых поручений (см. реф. 1574). Информация, состоящая из количества товаров и кода каталожного номера товара, вводится с одного из 10 параллельно работающих клавишных аппаратов. При получении нового заказа о товаре по коду каталожного номера находится соответствующая ячейка запоминающего устройства, считывается из нее прежнее количество товаров и вычитается либо суммируется с вновь введенным количеством. Время выбора одного адреса, обработки его содержимого и записи новой информации составляет 0,4 сек. Рассматриваются устройство и функции основных узлов.

Ручной клавишный аппарат имеет 9 клавишей для выбора адреса, состоящего из 6 десятичных цифр, и количества товаров (из 3 цифр), две кнопки для задания выполнения сложения или вычитания, в зависимости от необходимости, индикатор переполнения ячеек «количества», так как их максимальная емкость равна 999. По мере набора информации последняя фиксируется в контрольном регистре клавишного аппарата. На время обработки информации, введенной с одного клавишного аппарата (0,4 сек.), другие 9 аппаратов автоматически отключаются. После окончания обработки информации со-

держимое регистра аппарата гасится сигналом, приходящим из центрального узла устройства.

Центральный узел состоит из ряда регистров, принимающих код адреса и новое «количество» с клавишных аппаратов и старое «количество» из запоминающего устройства, устройства суммирования и дешифраторов адреса. После выполнения суммирования сумма посылается на индикаторные лампочки соответствующего клавишного аппарата и записывается в ячейку старого количества. Главным узлом устройства является магнитный барабан, имеющий 130 головок по образующей. Вдоль окружности барабана под одной головкой размещается 3600 двоичных цифр. Каждая ячейка содержит 12 двоичных цифр, таким образом, общее количество ячеек составляет 39 000, которые делятся на 3 группы (*A*, *B* и *C*) по 13 000 ячеек. В каждой ячейке запоминается одно «количество». Адрес состоит из 6 десятичных цифр. Первая цифра определяет одну из трех групп, три последующие определяют одну из 130 магнитных головок, две последние цифры определяют одну из 100 ячеек, приходящихся на одну головку и относящихся к одной из групп. Линейная скорость барабана на его поверхности 40 *м/сек*, плотность записи 5 имп/*мм*. На одном сантиметре по образующей барабана размещается 6 магнитных головок. Кроме перечисленных узлов, имеется блок для набивки лент и вывода информации (адреса и «количества») на перфоленту, а также блок печати информации. Скорость печати последнего составляет 215 десятичных цифр в 1 мин. Все устройство размещено в одном шкафу размером $2{,}8 \times 0{,}75 \times 2$ *м*, потребляемая мощность 4 *квт*. В статье приводятся фото основных узлов устройства, а также фото образца перфоленты. *Л. С. Легезо*

1576. Вращающийся барабан классифицирует и запоминает торговые поручения (Whirling magnetic drum classifies and remembers mail orders) Popul. Mech. Mag., 1954, **101**, № 3, 113 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о выпуске устройства для систематизации и запоминания торговых поручений (см. реф. 1574, 1575). Дополнительно сообщается, что устройство спроектировано для оптовой фирмы «Дж. Плейн и К°» (John Plain and Co.), получающей в день до 15 000 поручений. Магнитный барабан вращается со скоростью 1750 об/мин. Для вывода информации достаточно набрать адрес на одном из 10 клавишных аппаратов и она будет выведена на перфоленту или перфокарту, либо просто напечатана. *Л. С. Легезо*

1577. В лабораториях (In the laboratories), Science, 1953, **118**, № 3069, 483 (англ.)

В одной из вычислительных лабораторий (Watson Scientific Computing Laboratory) вступила в действие машина, которая автоматически «осматривает» фотопластинки с изображениями неба, определяет положение отдельных звезд и обозначает это положение пробивками на перфокартах. Проектирование машины производилось в лаборатории, объединяющей исследования Колумбийского университета и фирмы IBM, и продолжалось 6 лет. Указан принцип работы машины. Вычисления, необходимые для того, чтобы связать измеренное положение изображения звезды на фотопластинке с ее истинным положением на небе, автоматически выполняются электронной вычислительной машиной. *Д. П. Гроссман*

1578. Использование электронных цифровых вычислительных машин для технических применений. Ливсли (The utilisation of electronic digital computers in engineering practice. Livesley R. K.), Engineering, 1953, **176**, № 4572, 349—350 (англ.)

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агарвал 1334
Айверсон 1501
Аймерих 1303
Александров И. И. 1415 К
Альбен 1543
Амемия 1375, 1379
Америо 1215
Андрианов С. Н. 1175
Анкени 1079
Анском 1399
Арзуманов Г. С. 1241
Аржаных И. С. 1232
Ароншайн 1146
Асколи 1341
Атия 1507
Ахиезер Н. И. 1153, 1324
Ахундзаде М. Ю. 1295

Б

Байрактаревич 1329
Бак 1532
Бакке 1189
Банфи 1551
Бартлет 1404
Барышев Д. Г. 1434
Батырев А. В. 1168, 1169
Бейли 1184 РЕЦ
Бейтман 1337 РЕЦ
Белов Н. В. 1430
Бенеш 1074
Бенни 1062 К
Бергман 1245
Березанский Ю. М. 1233
Берикашвили Н. А. 1131
Беркеш 1340
Бернацкий 1452 К
Бернштейн С. Н. 1152, 1153
Бехари 1458
Бибербах 1184 РЕЦ
Биркгоф 1279
Бирман С. Е. 1320
Блазиус 1065 РЕЦ
Блануша 1460
Бойаи 1070 К
Болин 1288
Болл 1122
Бонсалл 1158
Бохнер 1425 К
Браверман Э. М. 1259
Браун 1496
Браунбек 1403
Браун 1496
Браунбек 1403
Брейденбах 1426 РЕЦ
Брёйш 1087
Бродский М. Л. 1478
Броман 1419 К
Букштейн Р. И. 1259
Булиган 1056, 1448 РЕЦ, 1451, 1455 РЕЦ, 1472
Буххейм 1321
Бхатия 1555
Бюро 1222

В

Важевский Т. 1221, 1273
Вайнберг М. М. 1365
Валбрук 1381, 1382, 1383
Валенте 1417 К
Ван-Аллен 1546
Ван-Данциг 1076
Ван-дер-Варден 1088
Ван-дер-Поль 1216
Вандивер 1093
Василаке 1313
Вега Г. 1504 К
Вейнштейн 1278
Вен 1426 РЕЦ
Верблюнский 1159
Вергеланд 1189
Вильгельм 1104 РЕЦ
Виницкий И. Г. 1435
Виноградов И. М. 1100 К
Винтнер 1204
Войт С. С. 1306
Войтех 1064 К
Волков Е. А. 1475
Вольберг 1445 РЕЦ
Вольф 1084
Врклян 1111
Врублевская И. Н. 1197
Врум 1567 П
Вундерлих 1450

Г

Гавличек 1445 РЕЦ
Гаврилов Ю. М. 1500 Д
Гаврин М. К. 1366, 1367
Гальярдо 1196
Гамба 1384
Гаррис 1395
Гаск 1326
Гаттески 1335
Гёдертье 1513 РЕЦ
Геллинг 1488
Гельфонд А. 1364 РЕЦ
Гендерсон 1457
Гёртлер 1227, 1284
Гесс 1416 К
Гибш И. А. 1059 К
Гилбарг 1281
Гинзбург И. П. 1203
Гиццетти 1247
Главатый 1461, 1466, 1467
Глаголев А. А. 1354 К
Глаголева А. А. 1354 К
Глазунов Е. А. 1436 К
Годман 1385
Годуин 1085
Гози 1060 К
Голдсбро 1268
Гольдаммер 1510
Гончаров В. Л. 1059 К
Гординг 1238
Гордон В. О. 1439 К
Гофман 1412
Граф 1440 К
Гриффитс 1410
Громов М. Я. 1441 К
Гротендик 1374
Гудстейн 1077 РЕЦ
Гун Шэн 1163

Д

Дайер 1123
Дако 1264
Данкан 1346
Даукер 1199
Де-Вор 1254 РЕЦ
Дейвид 1398
Демидович Б. П. 1200
Денеш 1092
Джейкобс 1061 К
Джеймс 1095
Джон 1235
Джонсон 1078
Джрбашян М. М. 1178, 1179
Джэксон 1443 К
Дзин 1176
Дзядык В. К. 1156 Д
Диксмье 1386
Димов Л. 1484
Дорфман А. Г. 1433
Досон 1572 П
Дрегер 1067
Дюпарк 1101 К

Ж

Жак И. Е. 1149
Жерме 1223
Жюлья 1455 РЕЦ

З

Заборовский 1345
Зайлер 1256
Зальтцберг 1186
Занен 1444 РЕЦ
Заранкевич К. 1126, 1128
Зуховицкий 1155
Зуховицький С. І. 1155
Зюсс 1454 РЕЦ

И

Ивс 1107
Игути 1297
Иман 1305
Инцингер 1380
Ионеда 1129
Исаков В. И. 1563 К
Исхак 1110
Ишлинский А. Ю. 1294

Й

Йейтс 1185, 1330
Йонас 1230

К

Кавагути 1464
Кавагути 1476
Каландия А. И. 1298
Калиновская 1154
Калiновська С. С. 1154

Каминер 1514
Камм 1530
Кампен 1302
Кантелли 1392
Капилевич М. Б. 1228
Каплан 1573
Каприц 1291
Карапиколов 1192
Карролл 1571 П
Картан 1103 К
Като 1194
Кафьеро 1140 К
Кеймир 1413
Келс 1218 К
Кельбг 1310
Кендалл 1398
Кёте 1377
Кечкеметь 1144
Кинг 1396
Кинг 1514
Кине 1352 К
Кинман 1564 К
Киносита 1125
Киселев А. А. 1275
Кислер 1490
Кларк 1493
Клейнфелд 1119
Кли 1370
Клюшников В. Д. 1255
Кобаяси 1465
Коллац 1284
Колуччи 1161
Комацу 1248
Комет 1520
Кон 1186
Кон 1113
Конти 1314
Конфорто 1418 К
Копршива 1080
Копытов В. Д 1050
Коржинек 1104 РЕЦ
Корли 1496
Корчовский 1363 РЕЦ
Костоюков А. А. 1287
Котик 1279
Кравченко 1170
Крамская А. А. 1497
Крёнер 1292
Крон 1483
Крылов Б. Л. 1344 К
Куайн 1075
Куджани 1081, 1082, 1083
Кузьмин П. А. 1187
Куперман 1325
Куратовский К. 1127
Курепа 1362 РЕЦ
Кшижанский 1243

Л

Лав 1347 К
Лагерквист 1438 К
Ладфорд 1282
Ладыженская О. А. 1275
Лапин А. И. 1117
Латышева К. Я. 1191
Лебедев А. А. 1202
Левин В. И. 1259
Лейтон 1057
Леккеркеркер 1101 К
Лё Корбейе 1513 РЕЦ
Лензе 1336 К
Ленуар 1468
Лепин 1102 К
Лепинар 1060 К
Лессинг 1574
Лея 1358 К, 1421 К
Лея 1165
Ли 1289
Ливингстон 1138, 1332
Ливсли 1578
Лившиц Ф. Д. 1565 К
Лойцянский Л. Г. 1283
Лонг 1559
Лонго 1447
Лопатинский Я. Б. 1173
Лоран 1411
Лукач 1396
Лундквист 1554
Льюис 1188
Любовин В. Д. 1390 Д
Люстерник Л. А. 1473, 1474
Ляпин А. И. 1117
Ляпин Е. С. 1114

М

Мазур 1376
Майзель А. Д. 1207
Макаров А. Н. 1226
Макаров Г. И. 1304
Макки 1276
Мак-Лаклан 1266
Мак-Шейн 1124
Мамбриани 1331
Манакорда 1251
Манд 1231
Манро 1389 К
Марден 1158
Маржик 1104 РЕЦ
Маркович 1362 РЕЦ
Маркс 1311
Маркус 1136, 1137
Маркус 1265
Марусси 1428
Матьюс 1408
Мацумото 1190
Мачлуп 1393, 1394
Мели 1480
Менгер 1424 К
Мензел 1254 РЕЦ
Меньшов Д. Е. 1147
Мешковский 1182
Мидлтон 1405, 1406
Микусинский 1343 К
Миллер 1063 К
Милн-Томпсон 1364 РЕЦ
Минакшисундарам 1239
Минасян Р. С. 1280
Минквиц А. А. 1349 К
Михлин 1318 РЕЦ
Моги 1463
Монтефинале 1549
Мор 1106, 1139
Моравец 1270
Моргантини 1456
Морель-Вьяр 1387
Мусхелишвили 1317 К
Мясников П. В. 1258

Н

Нагелль 1089
Напп 1098
Нардини 1277
Натуччи 1097
Натх 1409
Наш 1519
Неванлинна 1373
Нёйман 1112
Немиров С. Н. 1499
Немыцкий 1205
Никаидо 1371
Николеску 1244
Новоселов С. И. 1414 К
Номото 1261
Нужин М. Т. 1171, 1174

О

Окамото 1296
Ольсен 1189
Онсагер 1393, 1394
Орлич 1376
Отто 1442 К
Отто 1442 К
Оуэнс 1272

П

Пароди 1489
Паскуаль 1327
Патек 1553
Патнам 1212, 1213, 1214
Пейдж 1328
Перди 1498 К
Переманс 1101 К
Перне 1060 К
Петерссон 1180
Петрашень Г. И. 1304
Петровский 1316 К
Пиньедоли 1351 К
Пиранян 1160
Пистойя 1342
Питерсон 1570 П
Питман 1547
Платоне 1312
Плейель 1240
Понсе 1133, 1134
Портер 1423 К
Поттер 1568 П
Прайс 1486
Престон 1401
Пуччи 1224, 1242

Р

Раджагопал 1177
Радикати 1384
Радон 1453 РЕЦ
Райт 1514
Рамакришнан 1408
Ратерфорд 1431 К
Рашевский 1250
Рейнвилл 1347 К
Ремон 1543
Рид 1427 РЕЦ
Роббинс 1395
Рогозинский 1166
Роджерс 1086
Розоноэр Л. И. 1259
Рой 1397
Руни 1338
Рышков С. С. 1263
Рябов Ю. А. 1201

С

Сабан 1118
Савинов Г. В. 1267
Саксена 1339
Сальвадори 1063 К
Самет 1090
Сас 1121
Сас 1432
Сатклифф 1528
Сато 1315
Саясов Ю. С. 1308
Сведберг 1561
Севери 1066
Сельберг 1096
Семенцов-Огиевский М. А. 1439 К
Сенгупта 1429
Сенгупта 1299
Сергеев Н. П. 1319 Д
Серпинский 1145
Сикорский 1372
Симпсон 1496
Сингал 1458
Сингер 1407
Ситон 1252
Сколник 1427 РЕЦ
Скорджи 1545
Скорый И. А. 1050
Слебодзинский 1459
Слейтер 1333
Слободянский М. Г. 1290
Смирнов В. И. 1350 К, 1355 К, 1356 К, 1357 К
Смит 1157
Соколов В. М. 1206
Стейнбак 1509
Степанов В. В. 1217 К
Стернберг 1293
Стернберг 1209
Стернберг 1209
Стернер 1522
Стивенсон 1470
Сторк 1506
Сулейманова Х. Р. 1109
Сюй 1108

Т

Тайлер 1481
Талдыкин А. Т. 1368, 1369
Тандори 1150
Тевзадзе 1135
Тильман 1378
Тимм 1181
Титчмарш 1237
Толбот 1505
Томас 1274
Томпсон 1353 К
Томпсон 1514
Трикоми 1219 К, 1249

Туран 1105
Тьеррен 1115

У

Уайберн 1211
Уайтман 1091
Уамсли 1148
У Вэнь-цзюнь 1130
Уилер 1519
Уинг 1558
Уитл 1400
Уиттекер 1068
Уманский Э. С. 1300
Уотсон 1210
Уотсон 1099
Уошберн 1511, 1512
Уэйнберг 1508

Ф

Фабрициус-Бьерре 1422 **К**
Фалькенхаген 1310
Фантл 1514
Фёллингер 1322, 1323
Феньё 1318 **РЕЦ**, 1479
Феррис 1307
Фетисов А. И. 1059 **К**
Феттис 1269
Финслер 1471 **РЕЦ**
Фишер 1061 **К**
Фишер 1487
Флюгге 1502 **К**
Фогель 1252
Фодор 1142, 1143
Фокс 1477
Франк 1556
Франк 1532
Фреше 1388 **К**
Фридлендер 1199
Фридрихс 1234
Фролов Н. А. 1141 **К**, 1348 **К**
Фудзисава 1527
Фукс 1183
Фьори 1496

Х

Хажалия Г. Я. 1286
Хаммер 1337 **РЕЦ**
Харпер 1094
Хартли 1427 **РЕЦ**
Харрис 1395
Хартман 1204
Хаус 1544
Хейль И. Г. 1051
Хейнц 1449
Хейс 1195
Хейфец Б. С. 1482
Хеммингер 1566 **П**
Хёниш 1065 **РЕЦ**
Хенкин 1073
Хермес 1077 **РЕЦ**
Херстейн 1402
Херциг 1301
Херцог 1160
Хессельбах 1309
Хинчин 1363 **РЕЦ**
Холт 1534, 1535
Хомма 1125
Хопф 1471 **РЕЦ**
Хорних 1225
Хоскинг 1493
Хохштейнер 1446 **РЕЦ**
Хренов Л. С. 1503 **К**
Хубендик 1359 **К**

Ц

Цахариас 1444 **РЕЦ**
Цветаев К. 1391
Цзун 1260
Цзюй Дин-и 1560
Цибарди 1437 **К**
Цитароза 1246

Ч

Чандрасекар 1285
Чапанис 1485
Чаплыгин С. А 1253 **К**
Черни 1437 **К**
Четверухин Н. Ф. 1436 **К**
Чех 1420 **К**
Чжан Сяо-ли 1236
Чжэнь Шэн-шень 1462
Чинкуини 1151, 1220
Чинкуини-Чибрарио 1220

Ш

Шаманский 1167
Шаманський В. Э. 1167
Шапиро 1166
Шарский Я. 1221
Шафхаузер-Граф 1469
Шаэнз 1467
Швец М. Е. 1229
Шевченко И. Н. 1059 **К**
Шёнфилд 1072
Шерк 1423 **К**
Шерман Д. И. 1172
Шеффер 1164
Шилд 1162
Шиллинг 1453 **РЕЦ**
Шлике 1491
Шмидт 1271
Шмыдт З. 1198
Шнейдар 1556
Шнейдер-Рикельме 1495
Шольц 1077 **РЕЦ**
Шульгин М. Ф. 1257
Шульце 1446 **РЕЦ**
Шут 1423 **К**
Шуэрц 1509
Шютте 1071

Э

Эванс 1193
Эванс 1116
Эверос 1189
Эдж 1120
Эллис 1132
Эмбер 1334
Эрдёш 1160
Эрскин 1252

Ю

Юбанкс 1293

Я

Яно 1425 **К**, 1463
Ярник 1360 **К**, 1361 **К**
Яценко Г. П. 1208

A

Agarwal R. P. 1334
Albin J. 1543
Amemiya I. 1375, 1379
Amerio L. 1215
Ankeny N. C. 1079
Anscombe F. J. 1399
Aronszajn N. 1146
Ascoli G. 1341
Atiya F. S. 1507
Aymerich G. 1303

B

Baehari R. 1458
Bailey W. N. 1184 **РЕЦ**
Bajraktarevic M. 1329
Bakke F. 1189
Ball B. J. 1122
Banfi A. 1551
Bartlett M. S. 1404
Bateman H. 1337 **РЕЦ**
Benes V. E. 1074
Benny L. B. 1062 **К**
Bergman S. 1245
Berkes B. 1340
Bhatia R. N. 1555
Bieberbach L. 1184 **РЕЦ**
Biernacki M. 1452 **К**
Birkhoff G. 1279
Blanuša D. 1460
Blasius H. 1065 **РЕЦ**
Bochner S. 1425 **К**
Bolin B. 1288
Bolyai J. 1070
Bonsall F. F. 1158
Bouligand G. 1056, 1448 **РЕЦ** 1451, 1455 **РЕЦ**, 1472
Braunbek W. 1403
Breidenbach W. 1426 **РЕЦ**
Breusch R. 1087
Broman A. 1419 **К**
Brown J. J. 1496
Buchheim W. 1321
Buck D. A. 1532
Bureau F. 1222

C

Cafiero F. 1140 **К**
Camier E. D. 1413
Caminer D. T. 1514
Cantelli F. P. 1392
Capriz G. 1291
Carroll F. M. 1571 **П**
Cartan E. 1103 **К**
Čech E. 1420 **К**
Cerni C. 1437 **К**
Chandrasekhar S. 1285
Chapanis A. 1485
Chern Shiing-shen 1462
Chinczyn A. 1363 **РЕЦ**
Cinquini S. 1151, 1220
Cinquini-Cibrario M. 1220
Clarke P. M. 1493
Cohn G. I. 1186
Cohn P. M. 1113
Collatz L. 1284
Colucci A. 1161
Comét S. 1520
Conforto F. 1418 **К**
Conti R. 1314
Cooperman Ph. 1325
Corley J. R. 1496
Cugiani M. 1081, 1082, 1083

D

Dacos F. 1264
David F. N. 1398
Dawson E. 1572 **П**
Dénes P. 1092
DeVore L. T. 1254 **РЕЦ**
Dixmier J. 1386
Dowker Y. N. 1199
Draeger M. 1067
Duncan D. G. 1346
Duparc H. J. A. 1101 **К**
Dyer E. 1123
Dzung L. S. 1260

E

Eaves J. C. 1107
Edge W. L. 1120
Ellis R. 1132
Erdös P. 1160
Erskine G. A. 1252
Eubanks R. A. 1293
Evans R. L. 1193
Evans T. 1116

F

Fabricius-Bjerre Fr. 1422 **К**
Falkenhagen H. 1310
Fantl L. 1514
Fenyö I. 1318 **РЕЦ**, 1479
Ferris H. G. 1307
Fettis H. E. 1269

Finsler P. 1471 **РЕЦ**
Fiori L. A. 1496
Fischer B. 1061 **К**
Fischer J. 1487
Fluegge W. 1502 **К**
Fodor G. 1142, 1143
Föllinger O. 1322, 1323
Fox L. 1477
Frank H. 1556
Frank W. I. 1532
Fréchet M. 1388 **К**
Friedlander F. G. 1199
Friedrichs K. O. 1234
Fuks B. A. 1183

G

Gagliardo E. 1196
Gamba A. 1384
Gårding L. 1238
Gask H. 1326
Gatteschi L. 1335
Gauzet J. 1060 **К**
Gelling H. 1488
Germay R. H. 1223
Ghizzetti A. 1247
Gilbarg D. 1281
Godement R. 1385
Godwin H. J. 1085
Goedertier P. 1513 **РЕЦ**
Goldammer R. 1510
Goldsbrough G. R. 1268
Goodstein R.L. 1077 **РЕЦ**
Görtler H. 1227, 1284
Graf U. 1440 **К**
Griffiths J. C. 1410
Grothendieck A. 1374

H

Hammer C. 1337 **РЕЦ**
Harper A. B. 1094
Harris T. E. 1395
Hartley M. C. 1427 **РЕЦ**
Hartman Ph. 1204
Havliček K. 1445 **РЕЦ**
Hayes W. D. 1195
Heinz E. 1449
Hemminger P. 1566 **П**
Henderson G. P. 1457
Henkin L. 1073
Hermes H. 1077 **РЕЦ**
Herstein I. N. 1402
Herzig A 1301
Herzog F. 1160
Hess A. 1416 **К**
Hesselbach B. 1309
Hlavatý V. 1461, 1466, 1467
Hochsteiner 1446 **РЕЦ**
Hofmann J. E. 1412
Holt A. W. 1534, 1535
Homma T. 1125
Hönisch W. 1065 **РЕЦ**
Hopf H 1471 **РЕЦ**
Hornich H. 1225
Hosking Z. D. 1493
House C. B. 1544
Hsu P. L. 1108
Hubendick E. 1359 **К**
Humbert P. 1334

I

Iguchi S. 1297
Imai I. 1305
Inzinger R. 1380
Ishaq M. 1110
Iverson K. E. 1501

J

Jackson K. L. 1443 **К**
Jacobs H. 1061 **К**
James G. 1095
Jarnik V. 1360 **К**, 1361 **К**
John F. 1235
Johnson S. M. 1078
Jonas H. 1230
Julia G. 1455 **РЕЦ**

K

Kamm L. J. 1530
Kampen N. G. van 1302
Kaplan J. Y. 1573
Karanicoloff Ch. 1192
Kato T. 1194
Kawaguchi A. 1464
Kawaguti M. 1476
Kelbg G. 1310
Kells L. M. 1218 **К**
Kendall M. G. 1398
Ketskeméty I. 1144
Kieβler F. 1490
King E. P. 1396
King G. S. D. 1514
Kinman Th. H. 1564 **К**
Kinoshita S. 1125
Klee V. L., Jr. 1370
Kleinfeld E. 1119
Knapp Th. 1098
Kobayashi Sh. 1465
Komatu Y. 1248
Kopřiva J 1080
Korczowski H. 1363 **РЕЦ**
Kořinek V. 1104 **РЕЦ**
Köthe G. 1377
Kotik J. 1279
Krawtchenko J. 1170
Kron G. 1483
Kröner E. 1292
Krzyżański M. 1243
Kurepa D. 1362 **РЕЦ**

L

Lagerqvist E. 1438 **К**
Layton W. I. 1057
Le Corbeiller P. 1513 **РЕЦ**
Lee E H. 1289
Leja E. 1358 **К**, 1421 **К**
Leja F. 1165
Lekkerkerker C. G. 1101 **К**
Lenoir M. 1468
Lense J. 1336 **К**
Lepine F. 1102 **К**
Lespinard V. 1060 **К**
Lessing L. P. 1574
Lewis D. C 1188
Livesley R. K. 1578
Livingston A. E. 1138, 1332
Long H. R. 1559
Longo C. 1447
Lorent H. 1411
Love C. E. 1347 **К**
Ludford G. S. S. 1282
Lukacs E. 1396
Lundqvist D. 1554

M

Machlup S. 1393, 1394
Mackie A. G. 1276
McLachlan N. W. 1266
McShane E. J. 1124
Maehly H. J. 1480
Mambriani A. 1331
Manacorda T. 1251
Marcus S. 1136, 1137
Marden M. 1158
Mařik J. 1104 **РЕЦ**
Marković Ž. 1362 **РЕЦ**
Markus L. 1265
Marussi A. 1428
Marx I. 1311
Mathews P. M. 1408
Matsumoto T. 1190
Mazur S. 1376
Mendes M. 1231
Menger K. 1424 **К**
Menzel D. H. 1254 **РЕЦ**
Meschkowski H. 1182
Middleton D. 1405, 1406
Mihlin Sz. G. 1318 **РЕЦ**
G.-Mikusinski J. 1343 **К**
Miller K. S. 1063 **К**
Milne-Thompson L. M. 1364 **РЕЦ**
Minakshisundaram S. 1239
Mohr E. 1106, 1139
Mogi I. 1463
Montefinale G. 1549
Morawetz C. S. 1270
Morel-Viard 1387
Morgantini E. 1456
Munroe M. E. 1389 **К**
Muskhelishvili N. I. 1317 **К**

N

Nagell T. 1089
Nardini R. 1277
Nash J. P. 1519
Nath P. 1409
Natucci A. 1097
Nemítchi V. V. 1205
Nevanlinna R. 1373
Neumann B. H. 1112
Nicolescu M. 1244
Nikaidô H. 1371
Nomoto A 1261

O

Okamoto S. 1296
Olsen H. 1189
Onsager 1393, 1394
Orlicz W. 1376
Otto E. 1442 **К**
Otto F. 1442 **К**
øveraas H. 1189
Owens O. G. 1272

P

Paige L. J. 1328
Parodi A. 1489
Pascual M. L. 1327
Pátek K. 1553
Peremans W. 1101 **К**
Pernet R. 1060 **К**
Peterson E. 1570 **П**
Petersson H. 1180
Petrovskij I. G. 1316 **К**
Pignedoli A. 1351 **К**
Piranian G. 1160
Pistoia A. 1342
Pittman G. F., Jr. 1547
Platone G. 1312
Pleijel A. 1240
Poncet J. 1133, 1134
Porter G. F. 1423 **К**
Potter J. T. 1568 **П**
Preston G. W. 1401
Price J. W. 1486
Pucci C. 1224, 1242
Purday H. F. P. 1498 **К**
Putnam C. R. 1212, 1213, 1214

Q

Quine W. V. 1075
Quinet J. 1352 **К**

R

Radicati L. 1384
Radon J. 1453 **РЕЦ**
Rainville E. D. 1347 **К**
Rajagopal C. T. 1177
Ramakrishnan A. 1408
Raşevski P. C. 1250
Raymond F.-H. 1543
Read C. B. 1427 **РЕЦ**
Robbins H. 1395
Rogers C. A. 1086
Rogosinski W. W. 1166
Rooney P. G. 1338
Roy S. N. 1397
Rutherford D. E. 1431 **К**

S

Saban G. 1118
Sáenz A. W. 1467
Sailer H. 1256
Saksena K. M. 1339
Saltzberg B. 1186
Salvadori M. 1063 **К**
Samet P. A. 1090
Satô T. 1315
Schaeffer A. C. 1164
Schaffhauser-Graf E. 1469
Schild A. 1162
Schilling F. 1453 **РЕЦ**
Schlicke H. M. 1491
Schmidt G. W. 1271
Schneider-Riquelme O. 1495
Scholz H. 1077 **РЕЦ**
Schulze W. 1446 **РЕЦ**
Schütte K. 1071

Schwertz F. A. 1509
Scorgie D. G. 1545
Seaton M. J. 1252
Selberg S. 1096
Sengupta A. M. 1429
Sengupta H. M. 1299
Severi F. 1066
Shapiro H. S. 1166
Shirk W. W. 1423 К
Shoenfield J. R. 1072
Shute W. G. 1423 К
Sierpinski W. 1145
Sikorski R. 1372
Simpson J. 1496
Singal M. K. 1458
Singer K. 1407
Skolnik D. 1427 РЕЦ
Slater L. J. 1333
Ślebodziński W. 1459
Smirnow W. I. 1355 К
Smith R. A. 1157
Šnejdar V. 1556
Steinback R. T. 1509
Stephenson G. 1470
Sternberg E. 1293
Sternberg H. I. 1209
Sternberg R. L. 1209
Sterner F. W. 1522
Storch L. 1506
Süss W. 1454 РЕЦ
Sutcliffe H. 1528
Svedberg B. 1561
Szász G. 1121
Szász P. 1432

T

Talbot A. 1505
Tandori K. 1150
Thierrin G. 1115
Thimm W. 1181
Thomas H. S. 1274
Thompson S.-P. 1353 К
Thompson T. R. 1514
Tillmann H.-G. 1378
Titchmarsh E. C. 1237
Tricomi F. G. 1219 К, 1249
Turán P. 1105
Tyler G. W. 1481

V

Valente G. 1417 К
Van Allen R. L. 1546
Van Dantzig D. 1076
Van der Pol B. 1216
Van der Waerden B. L. 1088
Vandiver H. S. 1093
Vasilache S. 1313
Veen S. C. van 1426 РЕЦ
Verblunsky S. 1159
Vilhelm V. 1104 РЕЦ
Vogel Th. 1262
Vojtěch J. 1064 К
Volberg O. A. 1445 РЕЦ
Vrkljan V. S. 1111
Vroom H. B. 1567

W

Waelbroeck L. 1381, 1382, 1383
Walmsley Ch. 1148
Washburn S. H. 1511, 1512
Watson A. G. D. 1210
Watson G. L. 1099
Weinberg L. 1508
Weinstein A. 1278
Wergeland H. 1189
Wheeler D. J. 1519
Whiteman A. L. 1091
Whittaker E. T. 1068
Whittle P. 1400
Whyburn W. M. 1211
Wing W. G. 1558
Wintner A. 1204
Wolff K. H. 1084
Wright W. B. 1514
Wunderlich W. 1450

Y

Yano K. 1425 К, 1463
Yates R. C. 1185, 1330
Yoneda N. 1129

Z

Zaanen A. C. 1444 РЕЦ
Zaborowski W. 1345
Zacharias M. 1444 РЕЦ
Zibardi L. 1437 К
Zin G. 1176
Zitarosa A. 1246

თევზაძე ნ. 1135

吳文俊 1130
張孝禮 1236
斯米爾諾夫 1356, 1357
藤沢道雄 1527
璩定一1560
維諾格拉陀夫 1100
龔昇 1163

Технический редактор *К. И. Игнаткова*

24

Подп. к печати 26/II-1955 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Вум. л. 4,25 Печ. л. 13,9
Заказ 960 Тираж 3400 экз. Уч.-изд. л. 22,0 Т-01586

2-я тип. Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10